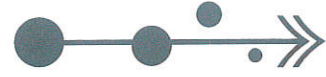


1  $a$  を正の実数とし、数列  $\{a_n\}$  を次で定義する。

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $a_2, a_3, a_4$  をそれぞれ分子と分母が  $a$  の整式となっている分数式で表せ。
- (2) 数列  $\{b_n\}$  を  $b_n = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$  により定めるとき、 $b_1, b_2, b_3, b_4$  をそれぞれ  $a$  を用いて表せ。
- (3)  $b_{n+1}$  と  $b_n$  を用いて  $b_{n+2}$  を表せ。
- (4) 数列  $\{c_n\}$  を  $c_n = b_{n+1} - b_n$  により定めるとき、 $n$  と  $a$  を用いて  $c_n$  を表せ。
- (5)  $a = 1$  のとき、 $b_n$  を  $n$  を用いて表せ。また、 $a_n$  を  $n$  を用いて表せ。



2016年 全学部日程 第2問

2  $a$  を正の実数とし、数列  $\{a_n\}$  を次で定義する。

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $a_2, a_3, a_4$  をそれぞれ分子と分母が  $a$  の整式となっている分数式で表せ。  
 (2) 数列  $\{b_n\}$  を  $b_n = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$  により定めるとき、 $b_1, b_2, b_3, b_4$  をそれぞれ  $a$  を用いて表せ。  
 (3)  $b_{n+1}$  と  $b_n$  を用いて  $b_{n+2}$  を表せ。  
 (4) 数列  $\{c_n\}$  を  $c_n = b_{n+1} - b_n$  により定めるとき、 $n$  と  $a$  を用いて  $c_n$  を表せ。  
 (5)  $a = 1$  のとき、 $b_n$  を  $n$  を用いて表せ。また、 $a_n$  を  $n$  を用いて表せ。

$$(1) a_2 = 1 + \frac{2}{a} = \frac{a+2}{a}, \quad a_3 = 1 + 2 \cdot \frac{a}{a+2} = \frac{3a+2}{a+2}, \quad a_4 = 1 + 2 \cdot \frac{a+2}{3a+2} = \frac{5a+6}{3a+2}$$

$$\therefore a_2 = \frac{a+2}{a}, \quad a_3 = \frac{3a+2}{a+2}, \quad a_4 = \frac{5a+6}{3a+2} //$$

$$(2) b_1 = -a_1 = -a, \quad b_2 = a_1 a_2 = a+2, \quad b_3 = -a_1 a_2 a_3 = -3a-2, \quad b_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 = 5a+6$$

$$\therefore b_1 = -a, \quad b_2 = a+2, \quad b_3 = -3a-2, \quad b_4 = 5a+6 //$$

$$(3) b_{n+2} = (-1)^{n+2} a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} a_{n+2}$$

$$= (-1)^{n+2} a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} \left(1 + \frac{2}{a_{n+1}}\right)$$

$$= -(-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} + 2 \cdot (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$= -b_{n+1} + 2b_n //$$

$$(4) (3) \text{より}, \quad b_{n+2} - b_{n+1} = -2(b_{n+1} - b_n)$$

$$\therefore c_{n+1} = -2c_n$$

$\therefore$  数列  $\{c_n\}$  は初項  $b_2 - b_1 = 2a+2$ 、公比  $-2$  の等比数列

$$\therefore c_n = (2a+2) \cdot (-2)^{n-1} \quad \therefore c_n = -(a+1) \cdot (-2)^n //$$

$$(5) a = 1 \text{ のとき}, \quad c_n = (-2)^{n+1}$$

$$\therefore n \geq 2 \text{ のとき}, \quad b_n = -1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^{k+1} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} (-2)^{n-1} = \frac{1}{3} \{1 - (-2)^{n+1}\} //$$

これは  $n=1$  のときも成り立っている。

$$n \geq 2 \text{ のとき}, \quad \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(-1)^n a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} = -a_n \text{ より} \quad a_n = -\frac{\frac{1}{3} \{1 - (-2)^{n+1}\}}{\frac{1}{3} \{1 - (-2)^n\}}$$

$$\therefore a_n = -\frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)^n} //$$

これは  $n=1$  のときも成り立っている。