______年　番号______　氏名______________________________

$\boxed{1}$ a を正の実数とし，数列 $\{a_n\}$ を次で定義する．

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 をそれぞれ分子と分母が a の整式となっている分数式で表せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$ により定めるとき，b_1，b_2，b_3，b_4 をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) b_{n+1} と b_n を用いて b_{n+2} を表せ．

(4) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = b_{n+1} - b_n$ により定めるとき，n と a を用いて c_n を表せ．

(5) $a = 1$ のとき，b_n を n を用いて表せ．また，a_n を n を用いて表せ．

（立教大学　2016）

立教大学

2016年 全学部日程 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ a を正の実数とし，数列 $\{a_n\}$ を次で定義する．

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=1+\frac{2}{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4 をそれぞれ分子と分母が a の整式となっている分数式で表せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n=(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$ により定めるとき，b_1，b_2，b_3，b_4 をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) b_{n+1} と b_n を用いて b_{n+2} を表せ．

(4) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n=b_{n+1}-b_n$ により定めるとき，n と a を用いて c_n を表せ．

(5) $a=1$ のとき，b_n を n を用いて表せ．また，a_n を n を用いて表せ．

(1) $a_2=1+\frac{2}{a}=\frac{a+2}{a}$，$a_3=1+2\cdot\frac{a}{a+2}=\frac{3a+2}{a+2}$，$a_4=1+2\cdot\frac{a+2}{3a+2}=\frac{5a+6}{3a+2}$

$\therefore\ \underline{a_2=\frac{a+2}{a},\ a_3=\frac{3a+2}{a+2},\ a_4=\frac{5a+6}{3a+2}}$ //

(2) $b_1=-a_1=-a$, $b_2=a_1a_2=a+2$, $b_3=-a_1a_2a_3=-3a-2$, $b_4=a_1a_2a_3a_4=5a+6$

$\therefore\ \underline{b_1=-a,\ b_2=a+2,\ b_3=-3a-2,\ b_4=5a+6}$ //

(3) $b_{n+2}=(-1)^{n+2}a_1a_2\cdots a_na_{n+1}a_{n+2}$

$=(-1)^{n+2}a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\left(1+\frac{2}{a_{n+1}}\right)$

$=-(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_na_{n+1}+2\cdot(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$

$=\underline{-b_{n+1}+2b_n}$ //

(4) (3)より，$b_{n+2}-b_{n+1}=-2(b_{n+1}-b_n)$

$\therefore\ c_{n+1}=-2c_n$

$\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ は初項 $b_2-b_1=2a+2$，公比 -2 の等比数列

$\therefore\ c_n=(2a+2)\cdot(-2)^{n-1}$ $\quad\therefore\ \underline{c_n=-(a+1)\cdot(-2)^n}$ //

(5) $a=1$ のとき，$c_n=(-2)^{n+1}$

$\therefore$ $n\geqq2$ のとき，$b_n=-1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^{k+1}=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}(-2)^{n-1}=\underline{\frac{1}{3}\{1-(-2)^{n+1}\}}$ // これは $n=1$ のときも成り立っている．

$n\geqq2$ のとき，$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{(-1)^na_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}{(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1}}=-a_n$ より $\quad a_n=-\frac{\frac{1}{3}\{1-(-2)^{n+1}\}}{\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}}$

$\therefore\ \underline{a_n=-\frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)^n}}$ // これは $n=1$ のときも成り立っている．