$\boxed{1}$ 正方形ABCDの内部の点Pに対して$\angle$CPDが直角であるとき，$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}$の最大値を求めよ．

（愛媛大学　2016）

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = \sin\left(\dfrac{3}{2}x\right) + \dfrac{3}{4}x$ と $g(x) = \dfrac{3}{4}x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．

(1) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点を求めよ．

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．

（三重大学　2014）

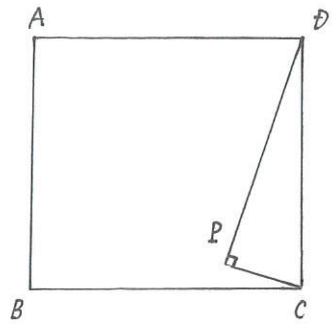
0002289810177999

愛媛大学

2016年 医学部 第5問

5 正方形ABCDの内部の点Pに対して∠CPDが直角であるとき，$\dfrac{BP}{AP}$ の最大値を求めよ．

正方形の一辺の長さは，辺の長さの比 $\dfrac{BP}{AP}$ に無関係なので



$A(-1,1)$, $B(-1,-1)$, $C(1,-1)$, $D(1,1)$

$P(x,y)$ ただし，$|x|<1$, $|y|<1$ とする．

$AP^2=(x+1)^2+(y-1)^2$, $BP^2=(x+1)^2+(y+1)^2$

よって，$\left(\dfrac{BP}{AP}\right)^2=\dfrac{x^2+y^2+2x+2y+2}{x^2+y^2+2x-2y+2}$

ここで，$CP\perp DP$ より，$\dfrac{y+1}{x-1}\cdot\dfrac{y-1}{x-1}=-1$

よって，$y^2-1=-x^2+2x-1$ $\quad\therefore x^2+y^2-2x=0$

$(x-1)^2+y^2=1$

$x=1+\cos\theta$, $y=\sin\theta$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi\right)$ とおくことができる．

$$\therefore \left(\frac{BP}{AP}\right)^2=\frac{2\cos\theta+\sin\theta+3}{2\cos\theta-\sin\theta+3}$$

$$=1+\frac{2\sin\theta}{2\cos\theta-\sin\theta+3}$$

これを $f(\theta)$ とおくと，$f'(\theta)=\dfrac{2\cos\theta(2\cos\theta-\sin\theta+3)-2\sin\theta(-2\sin\theta-\cos\theta)}{(2\cos\theta-\sin\theta+3)^2}$

$$=\frac{2(2+3\cos\theta)}{(2\cos\theta-\sin\theta+3)^2}$$

θ	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	$\left(\frac{3}{2}\pi\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\left(\frac{1}{2}\right)$

ただし，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi<\beta<\dfrac{3}{2}\pi$ で

$\begin{cases}\cos\alpha=\cos\beta=-\dfrac{2}{3} \text{ をみたすものとする．}\\ \sin\alpha=\dfrac{\sqrt5}{3},\ \sin\beta=-\dfrac{\sqrt5}{3}\end{cases}$

よって，$f(\theta)$ の最大値は $f(\alpha)=\dfrac{3+\sqrt5}{2}$

そのとき $\dfrac{BP}{AP}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt5}{4}}=\underline{\dfrac{\sqrt5+1}{2}}$ //

2014年 医学部 第4問

後半，計算大変‼

数理 石井K

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{4}x$ と $g(x) = \frac{3}{4}x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．

(1) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点を求めよ．

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれた図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．

(1) $\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x = 0 \quad \therefore \sin\left(\frac{3}{2}x\right) = 0$

$0 \leqq \frac{3}{2}x \leqq 3\pi \quad \therefore \frac{3}{2}x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \quad \therefore \underline{(0,0),\ \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{4}{3}\pi, \pi\right)}$

$\underline{\left(2\pi, \frac{3}{2}\pi\right)}$ //

(2) $f'(x) = \frac{3}{2}\cos\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$

$= \frac{3}{2}\left(\cos\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$

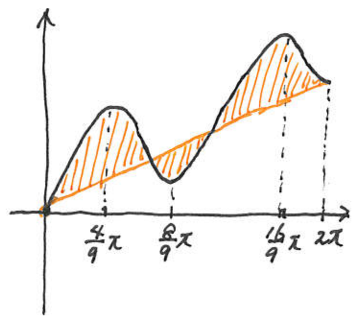
$\therefore f'(x) = 0$ となるのは，$\frac{3}{2}x = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi \quad \therefore x = \frac{4}{9}\pi,\ \frac{8}{9}\pi,\ \frac{16}{9}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{9}\pi$	$\cdots$	$\frac{8}{9}\pi$	$\cdots$	$\frac{16}{9}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{3}{2}\pi$
			$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$ 極大		$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi$ 極小		$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\pi$ 極大		

$V = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \pi\left\{\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{4}x\right\}^2 - \pi\left(\frac{3}{4}x\right)^2 dx$

$+ \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \pi\left(\frac{3}{4}x\right)^2 - \pi\left\{\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{4}x\right\}^2 dx$

$+ \int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi} \pi\left\{\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{4}x\right\}^2 - \pi\left(\frac{3}{4}x\right)^2 dx$



$= \pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin^2\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{2}x\sin\left(\frac{3}{2}x\right) dx$

$+ \pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} -\sin^2\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{3}{2}x\sin\left(\frac{3}{2}x\right) dx$

$+ \pi\int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi} \sin^2\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{2}x\sin\left(\frac{3}{2}x\right) dx$

$= \pi\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 3x}{2} dx + \frac{3}{2}\pi\int_0^{2\pi} x\left(-\cos\left(\frac{3}{2}x\right) \times \frac{2}{3}\right)' dx + 2\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} -\frac{1-\cos 3x}{2} - \frac{3}{2}\cdot x \cdot \left(-\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}x\right)' dx$

$= \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 3x}{6}\right]_0^{2\pi} + \frac{3}{2}\pi\left[-x\cdot\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right]_0^{2\pi} + \frac{3}{2}\pi\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{2}x\right) dx$

$-2\pi\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 3x}{6}\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} - 3\pi\left[-\frac{2}{3}x\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} + 3\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} -\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}x\, dx = \underline{\frac{19}{3}\pi^2}$ //