

1 数列 $\{a_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2} - \frac{a_n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

で定められているとする。このとき、次の間に答えよ。

(1) 4つの有理数 p, q, r, s が

$$p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$$

を満たすとする。このとき、 $p = r$ かつ $q = s$ であることを示せ。ただし、 $\sqrt{2}$ が無理数であることは用いてよい。

(2) 不等式

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2}$$

が成立することと、 $a_n = p_n + q_n\sqrt{2}$ (p_n および q_n は有理数) と表されることを n に関する数学的帰納法を用いて示せ。

(3) (2) で定義された数列 $\{p_n\}$ に対して、 p_{n+1} と p_n が満たす関係式、および一般項 p_n を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ は、

$$a_1 = 2, \quad (n+1)a_{n+1} - 3(n+2)a_n = 2n^2 + 6n + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められているとする。このとき、次の間に答えよ。

(1) $b_n = \frac{a_n}{n+1}$ とおくと、 b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2) b_n を n を用いて表せ。

(3) a_n を n を用いて表せ。

3 数列 $\{a_n\}$ は、

$$a_1 = 2, \quad (n+1)a_{n+1} - 3(n+2)a_n = 2n^2 + 6n + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められているとする。このとき、次の間に答えよ。

(1) $b_n = \frac{a_n}{n+1}$ とおくと、 b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2) b_n を n を用いて表せ。

(3) a_n を n を用いて表せ。

4 数列 $\{a_n\}$ は次を満たす。

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{4 - a_n}{a_n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $a_n = b_n + 2$ とおく。 b_{n+1} を b_n で表せ。

(2) $b_n = \frac{1}{c_n}$ とおく。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。