$\boxed{1}$ 駒が単位時間ごとに座標平面上を移動するものとする．n は 0 以上の整数とし，時刻 n に点 $(x,\ y)$ にある駒は，時刻 $n+1$ には $\dfrac{1}{4}$ ずつの確率で，4 点 $(x+1,\ y)$，$(x-1,\ y)$，$(x,\ y+1)$，$(x,\ y-1)$ のいずれかに移動するものとする．時刻 0 に点 $(0,\ 0)$ にある駒について，次の問いに答えよ．

(1) 時刻 2 に，駒が点 $(0,\ 0)$，点 $(1,\ 0)$，点 $(1,\ 1)$，点 $(2,\ 0)$ にある確率を，それぞれ求めよ．

(2) 時刻 4 に，駒が点 $(0,\ 0)$ にある確率を求めよ．

(3) 時刻 n に駒が点 $(x,\ y)$ にあるとき，n と $x+y$ の差は 2 の倍数であることを示せ．

（大阪市立大学　2017）

$\boxed{2}$ a を正の定数とし，$f(x)=|x^2+2ax+a|$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) $y=f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 2)$ を通るときの a の値を求めよ．また，そのときの $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) $a=2$ とする．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を求めよ．

（神戸大学　2016）

大阪市立大学

2017年 文系 第1問

増田

$\boxed{1}$ 駒が単位時間ごとに座標平面上を移動するものとする．n は0以上の整数とし，時刻 n に点 $(x,\ y)$ にある駒は，時刻 $n+1$ には $\frac{1}{4}$ ずつの確率で，4点 $(x+1,\ y)$，$(x-1,\ y)$，$(x,\ y+1)$，$(x,\ y-1)$ のいずれかに移動するものとする．時刻0に点 $(0,\ 0)$ にある駒について，次の問いに答えよ．

(1) 時刻2に，駒が点 $(0,\ 0)$，点 $(1,\ 0)$，点 $(1,\ 1)$，点 $(2,\ 0)$ にある確率を，それぞれ求めよ．

(2) 時刻4に，駒が点 $(0,\ 0)$ にある確率を求めよ．

(3) 時刻 n に駒が点 $(x,\ y)$ にあるとき，n と $x+y$ の差は2の倍数であることを示せ．

(1) ① 点(0,0)にある確率

原点 $\rightleftarrows$ $\downarrow\uparrow$ $\leftrightarrows$ $\downarrow\uparrow$ 時刻1で進んで時刻2で戻る 4通り

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times4=\frac{1}{4}$$

② 点(1,0)

条件の移動法では時刻2に点(1,0)には到着しない。

よって確率は 0

③ 点(1,1)

$\cdot \to (1,0) \uparrow (1,1)$ か $\cdot \uparrow (0,1) \to (1,1)$ の2通り

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{8}$$

④ 点(2,0)

$\cdot \to (1,0) \to (2,0)$ の1通り

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

(2) 時刻4に駒が点(0,0)にあるのは

i) 時刻2に $(\pm2,0)$,$(0,\pm2)$ にある

ii) 時刻2に $(0,0)$ にある

iii) 時刻2に $(1,1)(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$ にある

の3パターン

i) 時刻2に $(\pm2,0)$,$(0,\pm2)$ にある

例えば $\underset{右}{\to}\ \underset{右}{\to}\ \underset{左}{\leftarrow}\ \underset{左}{\leftarrow}$ など 4通り

ii) 時刻2に $(0,0)$ にある

時刻1,2で4通り、時刻3,4も4通り

$\underset{上下}{\uparrow\downarrow}\ \underset{右左}{\rightleftarrows}\ \underset{下上}{\downarrow\uparrow}\ \underset{左右}{\leftrightarrows}$

$4\times4=16$ 通り

iii) 時刻2に $(1,1)(1,-1)(-1,1)(-1,-1)$ にある

例えば 時刻1,2で2通り、時刻3,4も2通り

右上 上右　下左 左下

$2\times2\times4=16$ 通り

求める確率は、

$$\frac{4+16+16}{4\times4\times4\times4}=\frac{9}{64}$$

(3) 数学的帰納法を使う

(証) i) $n=0$ のとき、駒は点 $(0,0)$ にあり、

$0-(0+0)=0$ となり2の倍数

$n=1$ のとき 点 $(x,y)=(\pm1,0),(0,\pm1)$ で、

$$n-(x+y)=\begin{cases}1-1\\1-(-1)\end{cases}=\begin{cases}0\\2\end{cases}$$ どちらも2の倍数

ii) $n=k\ (\geqq1)$ のとき 点 (x_k,y_k) にあり、

$k-(x_k+y_k)=2m$ (m:整数)

とする。

$n=k+1$ のとき、

$$k+1-(\underbrace{x_{k+1}+y_{k+1}}_{(x_k\pm1,\ y_k)\text{か}(x_k,\ y_k\pm1)})=2m+\begin{cases}0\\2\end{cases}$$ どちらも2の倍数

以上よりすべての n に対して題意が成り立つ。■

2016 年 文系 第 2 問

$\boxed{2}$ a を正の定数とし，$f(x) = |x^2 + 2ax + a|$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) $y = f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 2)$ を通るときの a の値を求めよ．また，そのときの $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) $a = 2$ とする．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を求めよ．

(1) $x^2 + 2ax + a = (x+a)^2 - a^2 + a$

$= (x+a)^2 - a(a-1)$

(i) $0 < a < 1$ のとき $-a(a-1) > 0$ であるから，

すべての実数 x について，$x^2 + 2ax + a > 0$

$\therefore f(x) = (x+a)^2 - a(a-1)$

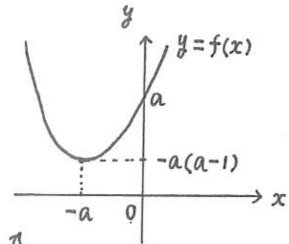
(ii) $a = 1$ のとき $f(x) = |(x+1)^2| = (x+1)^2$

(iii) $a > 1$ のとき $x^2 + 2ax + a = 0$ の 2つの解を

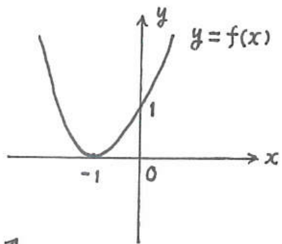
$\alpha = -a - \sqrt{a(a-1)}$，$\beta = -a + \sqrt{a(a-1)}$ とおくと

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a & (x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x \text{ のとき}) \\ -(x^2 + 2ax + a) & (\alpha < x < \beta \text{ のとき}) \end{cases}$$

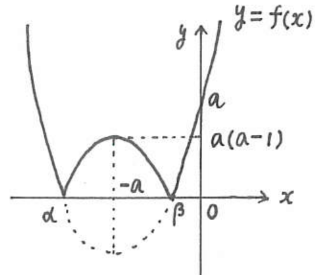
(i)〜(iii) よりグラフは右のようになる．



(i) $0<a<1$ のとき



(ii) $a=1$ のとき



(iii) $a>1$ のとき

(2) $2 = |1 - 2a + a|$ より，$|1 - a| = 2$

$\therefore a = -1, 3$ 　$a > 0$ なので，$\underline{a = 3}$ //

グラフは (1) の (iii) のようになり，

$\alpha = -3 - \sqrt{6}$，$\beta = -3 + \sqrt{6}$

$\frac{1}{6}$ 公式

$\therefore S = \int_\alpha^\beta -x^2 - 6x - 3\,dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \underline{8\sqrt{6}}$ //

(3) $g(x) = f(x) - 2x$ とおくと，$f(x) \geqq 2x + b \iff g(x) \geqq b$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & (x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x) \leftarrow (x+1)^2 + 1 \\ -x^2 - 6x - 2 & (\alpha < x < \beta) \leftarrow -(x+3)^2 + 7 \end{cases}$$

ここで，$\alpha = -2 - \sqrt{2}$，$\beta = -2 + \sqrt{2}$，$g(\alpha) = f(\alpha) - 2\alpha = -2\alpha$

$g(\beta) = f(\beta) - 2\beta = -2\beta$ 　よって，右のグラフと $y = b$ のグラフより

$b \leqq -2\beta$ すなわち，$\underline{b \leqq 4 - 2\sqrt{2}}$ //