

1 x, y を自然数とする.

- (1) $\frac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ.
- (2) $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が自然数であるような組 (x, y) をすべて求めよ.

(北海道大学 2016)

2016年文系第4問

 数理
石井K
4 x, y を自然数とする.

- (1) $\frac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ.
 (2) $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が自然数であるような組 (x, y) をすべて求めよ.

(1) $\frac{3x}{x^2+2}$ が自然数であることより,

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x^2+2} \geq 1 &\iff x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ &\iff (x-1)(x-2) \leq 0 \\ &\iff 1 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

 x は自然数より, $x=1, 2$ $x=1$ のとき, $\frac{3 \cdot 1}{1^2+2} = 1$, $x=2$ のとき, $\frac{3 \cdot 2}{2^2+2} = 1$ となり, ともに条件をみたす.

$$\therefore \underline{x=1, 2}$$

(2) $y=1$ のときは, $\frac{3x}{x^2+2}$ が0以上の整数になればよいが, $\frac{3x}{x^2+2} > 0$ より $\frac{3x}{x^2+2}$ が自然数になるときなので

(1) と同じである

 $y \geq 2$ のときは, $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$ より,

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x^2+2} \geq \frac{1}{2} &\iff x^2 - 6x + 2 \leq 0 \\ &\iff 3 - \sqrt{7} \leq x \leq 3 + \sqrt{7} \end{aligned}$$

 x は自然数より, $x=1, 2, 3, 4, 5$ • $x=1$ のとき, $\frac{3 \cdot 1}{1^2+2} = 1 \therefore y=1$ これは $y \geq 2$ に反して不適• $x=2$ のとき $\frac{3 \cdot 2}{2^2+2} = 1 \therefore y=1$ 不適• $x=3$ のとき, $\frac{3 \cdot 3}{3^2+2} = \frac{9}{11}$ $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$ より, $\frac{9}{11} < \frac{9}{11} + \frac{1}{y} \leq \frac{29}{22}$ なので

$$\frac{9}{11} + \frac{1}{y} = 1 \therefore y = \frac{11}{2} \quad y \text{ は自然数なので 不適}$$

• $x=4$ のとき, $\frac{3 \cdot 4}{4^2+2} = \frac{2}{3} \therefore \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \therefore y=3$ • $x=5$ のとき, $\frac{3 \cdot 5}{5^2+2} = \frac{5}{9} \therefore \frac{1}{y} = \frac{4}{9} \therefore y = \frac{9}{4}$ 不適以上より, $(x, y) = (1, 1), (2, 1), (4, 3)$