

1 関数 $f(x) = \log(1 + x^2)$ について、次の問いに答えよ。

(1) $\int_0^1 \log(1 + x^2) dx$ を求めよ。

(2) 導関数 $f'(x)$ の増減を調べ、 $y = f'(x)$ のグラフの概形をかけ。

(3) 曲線 $C: y = f(x)$ と曲線 C の互いに直交している 2 本の接線とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(旭川医科大学 2014)

2014年医学部 第1問

1 関数 $f(x) = \log(1+x^2)$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $\int_0^1 \log(1+x^2) dx$ を求めよ。
 (2) 導関数 $f'(x)$ の増減を調べ、 $y = f'(x)$ のグラフの概形をかけ。
 (3) 曲線 $C: y = f(x)$ と曲線 C の互いに直交している2本の接線とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \int_0^1 (x)' \log(1+x^2) dx &= [x \log(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx \\
 &= \log 2 - [2x]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\
 &= \log 2 - 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
 &= \log 2 + \frac{\pi}{2} - 2
 \end{aligned}$$

$$(2) f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

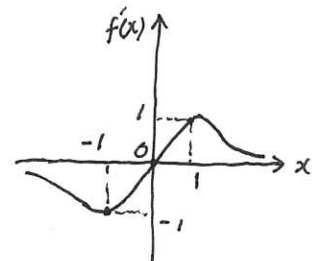
$$\therefore f''(x) = 0 \text{ と なるのは } x = \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$$

$\therefore y = f'(x)$ のグラフは右のようになる

x	...	-1	...	1	...
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f'(x)$	↘	-1	↗		↘

極小
↑ (極大)



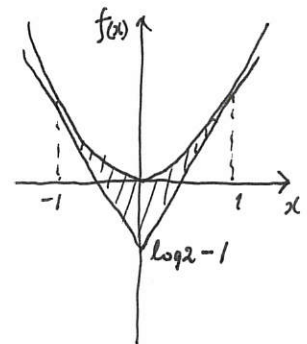
(3) (2) より、 $f'(\alpha) \cdot f'(\beta) = -1$ かつ、 $\alpha < \beta$ と なるのは、

$\alpha = -1, \beta = 1$ のときのみである。 ($\because |f'(x)| \leq 1$ がすべての x で成り立つ)

このとき、2本の接線は、

$$\begin{cases} y = -x - 1 + \log 2 \\ y = x - 1 + \log 2 \end{cases}$$

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f''(x)$	↘	0	↗



$$\therefore S = 2 \int_0^1 \log(1+x^2) - \{+x - 1 + \log 2\} dx$$

$$= 2 \int_0^1 \log(1+x^2) dx + 2 \int_0^1 -x + 1 - \log 2 dx = \pi - 3$$