

1 2個の文字 A, B を重複を許して左から並べて 7 文字の順列を作る. 次の条件をみたす順列はそれぞれいくつあるか答えなさい.

- (1) A が 5 個以上現れる.
- (2) A A B B がこの順に連続して現れる.
- (3) A が 3 個以上連続して現れる.

(首都大学東京 2017)

2 関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ.
- (2) $a = \cos \frac{5\pi}{9}$ とするとき, $f(a)$ の値を求めよ.
- (3) 不等式

$$-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$$

を証明せよ.

(岡山大学 2016)

2017年 都市教養(文系) 第2問

2 2個の文字 A, B を重複を許して左から並べて7文字の順列を作る。次の条件をみたす順列はそれぞれいくつあるか答えなさい。

- (1) A が5個以上現れる。
 (2) AAB B がこの順に連続して現れる。
 (3) A が3個以上連続して現れる。

(1) (i) A が5個, B が2個のとき

$$\frac{7!}{5!2!} = 21 \text{ 通り}$$

(ii) A が6個, B が1個 … 7通り

(iii) A が7個 … 1通り

(i) ~ (iii) より, $21 + 7 + 1 = \underline{29 \text{ 個}}$ //

(2) AAB B が出現する位置に注目すると,

AAB B XXX, XAAB BXX, XXAAB BX, XXXAAB B

ただし, X は A または B のどちらかが入る

それぞれ $2^3 = 8$ 通りあるから, $4 \times 8 = \underline{32 \text{ 個}}$ //

(3) (i) A が3個連続して現れるもの

AAAB XXX, BAAAB XX, XBAAAB X, XXBAAAB, XXXBAAA

それぞれ $2^3 = 8$ 通り, $2^2 = 4$ 通り, 4通り, 4通り, 8通りあるが

AAABAAA は 2回 数えているから, $8 + 4 + 4 + 4 + 8 - 1 = 27$ 通り

(ii) A が4個連続して現れるもの

AAAAB XX, BAAAAB X, XBAAAAB, XXBAAAA

それぞれ 4通り, 2通り, 2通り, 4通りなので 12通り

(iii) A が5個連続して現れるもの

AAAAAB X, BAAAAAB, XBAAAAA 全部で 5通り

(iv) A が6個連続して現れるもの 2通り

(v) “ 7 “ 1通り

(i) ~ (v) より, $27 + 12 + 5 + 2 + 1 = \underline{47 \text{ 個}}$ //



2016年文系第4問

4 関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
 (2) $a = \cos \frac{5\pi}{9}$ とするとき、 $f(a)$ の値を求めよ。
 (3) 不等式

$$-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$$

を証明せよ。

$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= 24x^2 - 6 \\ &= 24\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{また、} f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 3 - 1 = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 3 - 1 = -3$$

よって、増減表は右上のようになり、グラフは右となる。

よって $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は 3個。

$$(2) \text{ 3倍角の公式より、} \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} f(a) &= 8a^3 - 6a - 1 \\ &= 2\left(4\cos^3\frac{5\pi}{9} - 3\cos\frac{5\pi}{9}\right) - 1 \\ &= 2 \cdot \cos\frac{5\pi}{3} - 1 \quad (\because \textcircled{1} \text{より}) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(3) \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \frac{2\pi}{3} \text{ より、} \underline{-\frac{1}{2} < \cos \frac{5\pi}{9} < 0}$$

これより、上のグラフの赤丸の真ん中が $\cos \frac{5\pi}{9}$ であると分かる。

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{8}{125} + \frac{6}{5} - 1 = \frac{17}{125}, \quad f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{8}{216} + 1 - 1 = -\frac{1}{27}$$

$$(2) \text{より、} f\left(\cos \frac{5\pi}{9}\right) = 0$$

$$\text{以上より、} f\left(-\frac{1}{6}\right) < f\left(\cos \frac{5\pi}{9}\right) < f\left(-\frac{1}{5}\right)$$

 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ において、 $y = f(x)$ のグラフは単調減少であるから、

$$-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6} \quad \blacksquare$$

x	\dots	$-\frac{1}{2}$	\dots	$\frac{1}{2}$	\dots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	1	\searrow	-3	\nearrow

極大 極小

