$\boxed{1}$ 原点をOとする座標平面上に2点A(1, 0)，B(0, 1)をとり，Oを中心とする半径1の円の第1象限にある部分をCとする．3点P(x_1, y_1)，Q(x_2, y_2)，RはCの周上にあり，$2y_1 = y_2$および$\angle\mathrm{AOP} = 4\angle\mathrm{AOR}$を満たすものとする．直線OQと直線$y = 1$の交点をQ′，直線ORと直線$y = 1$の交点をR′とする．$\angle\mathrm{AOP} = \theta$とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 点Qの座標をθを用いて表せ．

(2) 点Q′と点R′の座標をθを用いて表せ．

(3) 点Pが点Aに限りなく近づくとき，$\dfrac{\mathrm{BR}'}{\mathrm{BQ}'}$の極限を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$であることは用いてよい．

$\boxed{2}$ 3個の玉が横に一列に並んでいる．コインを1回投げて，それが表であれば，そのときに中央にある玉とその左にある玉とを入れ替える．また，それが裏であれば，そのときに中央にある玉とその右にある玉とを入れ替える．この操作を繰り返す．

(1) 最初に中央にあったものがn回後に中央にある確率を求めよ．

(2) 最初に右端にあったものがn回後に右端にある確率を求めよ．

$\boxed{3}$ 関数

$$y = x^x(1 - x)^{1-x} \quad (0 < x < 1)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) yの導関数を求めよ．

(2) yのとり得る値の範囲を求めよ．ただし，必要があれば，$\displaystyle\lim_{t \to +0} t^t = 1$であることを証明なしに用いてよい．

秋田大学

2016年 国際資源学部 第3問

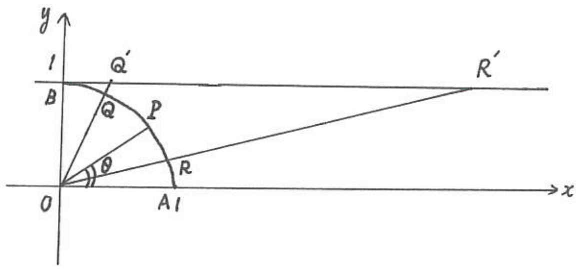
数理 石井K

$\boxed{3}$ 原点をOとする座標平面上に2点A(1, 0), B(0, 1)をとり，Oを中心とする半径1の円の第1象限にある部分をCとする．3点$\mathrm{P}(x_1, y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2, y_2)$，RはCの周上にあり，$2y_1 = y_2$ および $\angle\mathrm{AOP} = 4\angle\mathrm{AOR}$ を満たすものとする．直線OQと直線$y=1$の交点をQ′，直線ORと直線$y=1$の交点をR′とする．$\angle\mathrm{AOP} = \theta$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 点Qの座標をθを用いて表せ．

(2) 点Q′と点R′の座標をθを用いて表せ．

(3) 点Pが点Aに限りなく近づくとき，$\dfrac{\mathrm{BR'}}{\mathrm{BQ'}}$の極限を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$であることは用いてよい．



(1) $2y_1 = y_2$，$y_1 = \sin\theta$ より

$y_2 = 2\sin\theta$

$x_2^2 + y_2^2 = 1$，$x_2 > 0$ より

$x_2 = \sqrt{1-4\sin^2\theta}$

$\therefore\ \underline{\mathrm{Q}\left(\sqrt{1-4\sin^2\theta},\ 2\sin\theta\right)}$ //

(2) 直線OQ：$y = \dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}x$ に $y=1$ を代入して．$x = \dfrac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$　$\therefore\ \underline{\mathrm{Q'}\left(\dfrac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta},\ 1\right)}$ //

$\mathrm{R}\left(\cos\dfrac{\theta}{4},\ \sin\dfrac{\theta}{4}\right)$ より 直線OR：$y = \left(\tan\dfrac{\theta}{4}\right)x$　これに $y=1$ を代入して．$x = \dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{4}}$

$\therefore\ \underline{\mathrm{R'}\left(\dfrac{\cos\frac{\theta}{4}}{\sin\frac{\theta}{4}},\ 1\right)}$ //

(3) 点Pが点Aに限りなく近づくとき．$\theta \to 0$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\mathrm{BR'}}{\mathrm{BQ'}} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\frac{\theta}{4}}{\sin\frac{\theta}{4}}\cdot\frac{2\sin\theta}{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\underbrace{\frac{\frac{\theta}{4}}{\sin\frac{\theta}{4}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin\theta}{\theta}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{8\cos\frac{\theta}{4}}{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}}_{\to 8}$$

$= \underline{8}$ //

信州大学

2014 年 第 3 問

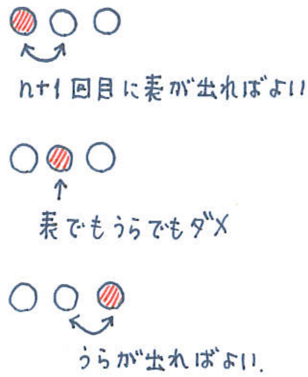
数理 石井K

3 3 個の玉が横に一列に並んでいる．コインを 1 回投げて，それが表であれば，そのときに中央にある玉とその左にある玉とを入れ替える．また，それが裏であれば，そのときに中央にある玉とその右にある玉とを入れ替える．この操作を繰り返す．

(1) 最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を求めよ．

(2) 最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率を求めよ．

(1) 最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を P_n とおくと．



$$P_{n+1} = \underbrace{(1-P_n)\times\frac{1}{2}}$$

中央になければ $n+1$ 回目には $\frac{1}{2}$ で中央にくる.

$$\therefore P_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_n - \frac{1}{3}\right)$$

∴ 数列 $\left\{P_n - \frac{1}{3}\right\}$ は 初項 $P_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$$\therefore P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore P_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \quad //$$

(2) 最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率，中央にある確率をそれぞれ g_n，r_n とおくと．左端にある確率は．$1 - g_n - r_n$ となる．

$$\begin{cases} g_{n+1} = \frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}r_n & \cdots ① \\ r_{n+1} = \frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}(1-g_n-r_n) \iff r_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r_n & \cdots ② \end{cases}$$

②より．$r_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(r_n - \frac{1}{3}\right)$

∴ 数列 $\left\{r_n - \frac{1}{3}\right\}$ は 初項 $r_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列

$$\therefore r_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

これを①に代入して．式変形すると．

$$g_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(g_n - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \iff \frac{g_{n+1} - \frac{1}{3}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = -\frac{g_n - \frac{1}{3}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} + \frac{1}{3}$$

$\therefore S_n = \dfrac{g_n - \frac{1}{3}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ とおくと．$S_{n+1} - \frac{1}{6} = -\left(S_n - \frac{1}{6}\right)$ ∴ $\left\{S_n - \frac{1}{6}\right\}$ は 初項 $\underbrace{-2\left(g_1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}}_{= -\frac{1}{2}}$，公比 -1 の等比数列 $\therefore S_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(-1)^{n-1}$

$$\therefore g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3} \quad //$$

2016年 第8問

数理 石井K

$\boxed{8}$ 関数

$$y = x^x(1-x)^{1-x} \quad (0 < x < 1)$$

について，次の問いに答えよ．

(1) y の導関数を求めよ．

(2) y のとり得る値の範囲を求めよ．ただし，必要があれば，$\lim_{t \to +0} t^t = 1$ であることを証明なしに用いてよい．

(1) $0<x<1$ のとき，$x^x>0$，$(1-x)^{1-x}>0$

∴ 両辺，対数をとり，

$\log y = \log x^x(1-x)^{1-x}$

∴ $\log y = x\log x + (1-x)\log(1-x)$

両辺 x で微分して，

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \log x + x\cdot\frac{1}{x} - \log(1-x) + (1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}$$

$$= \log x - \log(1-x)$$

$$= \log\frac{x}{1-x}$$

∴ $\underline{y' = x^x(1-x)^{1-x}\log\frac{x}{1-x}}$ //

(2) (1)より，$y'=0$ となるのは，$0<x<1$ において，$\frac{x}{1-x}=1$ すなわち $x=\frac{1}{2}$ のとき

$\lim_{t\to+0} t^t = 1$ より，$\lim_{x\to+0} y = 1$，$\lim_{x\to1-0} y = \lim_{t\to+0} t^t(1-t)^{1-t} = 1$

$t=1-x$ とおいた

よって増減表は下のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
y'		$-$	0	$+$	
y	(1)	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	(1)

∴ $\underline{\frac{1}{2} \leqq y < 1}$ //