＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3-2a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n に対し，a_n は $\dfrac{1}{3} \leqq a_n < \dfrac{1}{2}$ を満たす有理数であることを示せ．

(2) 一般項 a_n を $a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$（ただし，p_n，q_n は互いに素な自然数）と既約分数で表したとき，p_{n+1} を p_n と q_n で，q_{n+1} を p_n と q_n でそれぞれ表せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

（お茶の水女子大学　2017）

$\boxed{2}$ さいころを n 回ふり，n 個の出た目の数をすべて掛け合わせた値を a_n とする．次の問いに答えよ．

(1) a_n が素数となる確率を n を用いて表せ．

(2) a_n が 3 の倍数となる確率を n を用いて表せ．

(3) a_n を 6 で割った余りが 1 となる確率を n を用いて表せ．

(4) a_n を 7 で割った余りが 1 となる確率は n の値によらず $\dfrac{1}{6}$ であることを示せ．

(5) $a_n < 10$ となる確率を $n=1$，$n=2$ のときに求め，$n \geqq 3$ のときは n を用いて表せ．

（お茶の水女子大学　2017）

$\boxed{3}$ $f(x) = 2 - ax$，$g(x) = |bx - 2|$ とする．ただし，a と b は $0 < a < b$ を満たす定数である．次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $f(x) - g(x) \geqq 1$ を満たす x が存在するための a と b の条件を求めよ．

(2) a と b は (1) で求めた条件を満たしているとする．x と y が

$$f(x) - g(x) \geqq 1, \quad f(x) \geqq y \geqq g(x)$$

をともに満たす範囲を動くとき，$x + y$ の最大値および最小値を求めよ．

（お茶の水女子大学　2017）

$\boxed{4}$ 四面体 OABC について次の問いに答えよ．ただし $\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{COA} = \dfrac{\pi}{3}$ とし，四面体 OABC の体積を V，$\mathrm{OA} = a$，$\mathrm{OB} = b$，$\mathrm{OC} = c$ とおく．

(1) 点 B から 3 点 O，A，C を通る平面に垂線 BH を下ろす．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

を満たす実数 x，y を a，b，c を用いて表せ．

(2) V を a，b，c を用いて表せ．

(3) 2 点 O，C を固定し，2 点 A，B を $a+b+c=6$ を満たす範囲で動かすとき，V の最大値を c を用いて表せ．また，そのときの a，b の値を c を用いて表せ．

(4) 点 O を固定し，3 点 A，B，C を $a+b+c=6$ を満たす範囲で動かすとき，V の最大値を求めよ．また，そのときの a，b，c の値を求めよ．

（お茶の水女子大学　2017）

$\boxed{5}$ aを実数とする．3次方程式$x^3-7x^2+15x-a=0$が異なる3個の実数解α，β，γ（$\alpha<\beta<\gamma$）を持つとする．次の問いに答えよ．

(1) 実数aの取り得る値の範囲を求めよ．

(2) $1<\alpha$かつ$\beta<3<\gamma$となることを示せ．

(3) $\alpha+\beta=\gamma$となるようなaの値およびそのときのγの値を求めよ．

(4) α，β，γを3辺の長さとする三角形が存在するためのaについての条件を求めよ．

（お茶の水女子大学　2017）