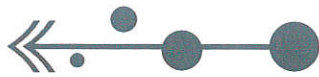


1  $i$ を虚数単位とするとき、次の各問に答えよ。

- (1) 複素数  $c = 1 + i$ について、 $c$ と共役な複素数  $\bar{c}$ および  $|c|^2$ をそれぞれ求めよ。
- (2) 複素数  $z$ が  $|z| = 1$ を満たすとする。このとき、 $z + \frac{1}{z}$ が実数であることを証明せよ。
- (3)  $\alpha, \beta$ を複素数として  $\alpha$ の実部と虚部がともに正であるとする。また、 $|\alpha| = |\beta| = 1$ とする。  
複素数  $i\alpha, \frac{i}{\alpha}, \beta$ で表される複素数平面上の3点が、ある正三角形の3頂点であるとき、 $\alpha, \beta$ をそれぞれ求めよ。

(静岡大学 2016)



2016年理(物・化)・工・情報第4問

4  $i$  を虚数単位とするとき、次の各問に答えよ。

- (1) 複素数  $c = 1 + i$  について、 $c$  と共役な複素数  $\bar{c}$  および  $|c|^2$  をそれぞれ求めよ。  
 (2) 複素数  $z$  が  $|z| = 1$  を満たすとする。このとき、 $z + \frac{1}{z}$  が実数であることを証明せよ。  
 (3)  $\alpha, \beta$  を複素数として  $\alpha$  の実部と虚部がともに正であるとする。また、 $|\alpha| = |\beta| = 1$  とする。複素数  $i\alpha, \frac{i}{\alpha}, \beta$  で表される複素数平面上の3点が、ある正三角形の3頂点であるとき、 $\alpha, \beta$  をそれぞれ求めよ。

(1)  $\bar{c} = 1 - i, |c|^2 = 2$  ,,

(2)  $|z| = 1$  より、 $z = \cos\theta + i\sin\theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) と表せる。

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= \cos\theta + i\sin\theta + (\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} \\ &= \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \quad \downarrow \text{ド・モアブル} \\ &= \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta \\ &= 2\cos\theta \quad (\text{実数}) \quad \square \end{aligned}$$

(3)  $\alpha$  は実部が正、虚部が正、 $|\alpha| = 1$  より、 $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) と表せる。

このとき、 $i\alpha = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\theta + \frac{\pi}{2})$ ,  $\frac{i}{\alpha} = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$A(i\alpha), B(\frac{i}{\alpha}), C(\beta)$  とすると、 $|i\alpha| = |\frac{i}{\alpha}| = |\beta| = 1$  であるから

正三角形  $ABC$  は単位円に内接する。原点を  $O$  とすると、

$\angle AOB = (\theta + \frac{\pi}{2}) - (\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{2\pi}{3}$  であるから、 $\theta = \frac{\pi}{3}$

よって、 $i\alpha = \cos \frac{5}{6}\pi + i\sin \frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$\frac{i}{\alpha} = \cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$\alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\therefore \beta = i\alpha \cdot (\cos \frac{2}{3}\pi + i\sin \frac{2}{3}\pi)$

$= (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$= -i$

$\therefore \alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \beta = -i$  ,,

