

1 数列  $\{a_n\}$  を次のように定める.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2n}{n+1}a_n + \frac{2^{n+1}}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1)  $a_2, a_3, a_4$  を求めよ.
- (2) 一般項  $a_n$  を推測し, それが正しいことを数学的帰納法によって示せ.
- (3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2}$$

(三重大学 2017)

2 虚部が正の複素数  $z$  が表す複素数平面上の点を P とし,  $w = \frac{z^2}{|z|}$  で与えられる点を Q とする. また, 原点を O とする.

- (1)  $z$  の極形式を  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  とするとき,  $w$  の極形式を求めよ. さらに  $\triangle OPQ$  の面積を  $r$  と  $\theta$  を用いて表せ.
- (2)  $z$  が  $|z - 4i| = 2|z - i|$  を満たして動くとき,  $\triangle OPQ$  の面積の最大値を求めよ.

(三重大学 2017)

3  $k$  を定数として  $\theta$  の方程式

$$\cos 2\theta = k \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える.

- (1) この方程式が異なる二つの解を持つような  $k$  の範囲を求めよ.
- (2)  $k$  が (1) の範囲にあるとして, 二つの解を  $\theta = \alpha, \beta$  とおく.  
 $\sin \alpha \sin \beta$  を求めよ. さらに  $\sin \alpha + \sin \beta, \cos(\alpha + \beta)$  の  
値を  $k$  を用いて表せ.

(三重大学 2017)

4 実数  $a, b$  に対し,  $I(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a - b \sin x)^2 dx$  と  
する.

- (1)  $I(a, b) = I(0, b) + 2\pi a^2$  を示せ.
- (2)  $I(0, b)$  を求めよ.
- (3)  $I(a, b) \geq \frac{2\pi(\pi^2 - 6)}{3}$  を示せ. また等号が成り立つとき  
の  $a, b$  の値を求めよ.

(三重大学 2017)