

1 方程式 $(\log_2 x)^2 \cdot \log_2(8x^2) = \alpha$ は, すべて異なる 3 つの実数解 $\frac{\beta}{\gamma}, \beta, \beta\gamma$ ($\gamma \neq 0$) をもつものとする. 2α の値を求めよ.

(自治医科大学 2017)

2017年 医学部 第4問

増田

4 方程式 $(\log_2 x)^2 \cdot \log_2(8x^2) = \alpha$ は、すべて異なる3つの実数解 $\frac{\beta}{\gamma}$, β , $\beta\gamma$ ($\gamma \neq 0$) をもつものとする。 2α の値を求めよ。

$$(\log_2 x)^2 \cdot \log_2(8x^2) = \alpha \quad \text{を变形して}$$

$$(\log_2 x)^2 \cdot (3 + 2 \log_2 x) = \alpha$$

$$2(\log_2 x)^3 + 3(\log_2 x)^2 - \alpha = 0 \quad \dots (*)$$

方程式(*)の答えが $x = \frac{\beta}{\gamma}$, β , $\beta\gamma$ だから、 $\log_2 \beta = b$, $\log_2 \gamma = r$ とおいて

$$\log_2 \frac{\beta}{\gamma} = \log_2 \beta - \log_2 \gamma = b - r$$

$$\log_2 \beta = b$$

$$\log_2 \beta\gamma = \log_2 \beta + \log_2 \gamma = b + r$$

を(*)に代入する。

$$\begin{cases} 2(b-r)^3 + 3(b-r)^2 - \alpha = 0 \quad \dots ① \\ 2b^3 + 3b^2 - \alpha = 0 \quad \dots ② \\ 2(b+r)^3 + 3(b+r)^2 - \alpha = 0 \quad \dots ③ \end{cases}$$

$$① + ③ \text{ より } 2 \left(\underbrace{2b^3 + 6br^2 + 3b^2 + 3r^2 - \alpha}_{\text{②より} = 0} \right) = 0$$

$$\therefore r^2(2b+1) = 0$$

$r=0$ つまり $\log_2 \gamma = 0$, $\gamma = 1$ のとき、「3つの異なる実数解」を満たさなくなるので、

$$2b+1=0$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

これを②に代入して、

$$2\alpha = 4b^3 + 6b^2 = 1$$