$\boxed{1}$ 次の問に答えよ．

(1) △ABCにおいて，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=3$，$\angle\mathrm{A}=\theta$とする．このとき，△ABCの外接円の半径Rをθを用いて表せ．

(2) a，bを$a^2+b^2=1$を満たす実数とするとき，$a+2b$の最大値を求めよ．

(3) 2次方程式$x^2+ax+24-a=0$が異なる2つの整数解をもつとする．実数aをすべて求めよ．

（東京都市大学　2015）

$\boxed{2}$ 関数$f(x)=\dfrac{e^{2x}}{9x^2+2}$について，次の問に答えよ．ただし，必要ならば$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$を用いてよい．

(1) $f(x)$の導関数$f'(x)$を求めよ．

(2) 関数$y=f(x)$の増減，極値を調べてそのグラフをかけ．

(3) kを定数とするとき，xについての方程式$e^{2x}=k(9x^2+2)$の解の個数を求めよ．

（東京都市大学　2014）

$\boxed{3}$ nを自然数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 任意のnに対し，不等式$n! \geqq 2^{n-1}$が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

(2) $n \geqq 4$のとき，不等式

$$1.7 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 2$$

が成り立つことを示せ．

（東京都市大学　2014）

0002150189487999

東京都市大学

2015年 工（電気電子工，建築） 第1問

数理 石井K

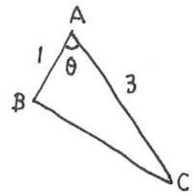
$\boxed{1}$ 次の問に答えよ．

(1) $\triangle$ABC において，AB $=1$，AC $=3$，$\angle$A $=\theta$ とする．このとき，$\triangle$ABC の外接円の半径 R を θ を用いて表せ．

(2) a，b を $a^2+b^2=1$ を満たす実数とするとき，$a+2b$ の最大値を求めよ．

(3) 2次方程式 $x^2+ax+24-a=0$ が異なる2つの整数解をもつとする．実数 a をすべて求めよ．

(1) 余弦定理より．



$BC^2 = 1^2+3^2-2\cdot1\cdot3\cdot\cos\theta$ $\quad\therefore BC=\sqrt{10-6\cos\theta}$

正弦定理より．

$\dfrac{BC}{\sin\theta}=2R$ $\quad\therefore \underline{R=\dfrac{\sqrt{10-6\cos\theta}}{2\sin\theta}}$ //

(2) $a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$ と表せるので

$a+2b=\cos\theta+2\sin\theta$

$=\sqrt5\left(\sin\theta\cdot\dfrac{2}{\sqrt5}+\cos\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt5}\right)$

$=\sqrt5\sin(\theta+\alpha)$ （ただし，α は $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt5}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt5}$ となる実数）

$\therefore$ $a+2b$ の最大値は $\underline{\sqrt5}$ //

(3) $x^2+ax-a-1=-25$

$\therefore (x-1)(x+1+a)=-25$ $\cdots(*)$

2つの整数解を α,β とすると，解と係数の関係より．$\alpha+\beta=-a$ となり．a も整数である

$(*)$において，$x-1$，$x+1+a$ はともに整数であるから．

$\begin{cases}x-1=25\\x+1+a=-1\end{cases}$ または $\begin{cases}x-1=5\\x+1+a=-5\end{cases}$ または $\begin{cases}x-1=1\\x+1+a=-25\end{cases}$ または $\begin{cases}x-1=-5\\x+1+a=5\end{cases}$

または $\begin{cases}x-1=-25\\x+1+a=1\end{cases}$

2次方程式の判別式を D とおくと．$D=a^2-4(24-a)>0$ $\quad\therefore a<-12,\ 8<a$

これをみたすとき．$\underline{a=-28,24}$ //

2014年 工（機シ・医工・化学）・知識工 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{9x^2+2}$ について，次の問に答えよ．ただし，必要ならば $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ を用いてよい．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ の増減，極値を調べてそのグラフをかけ．

(3) k を定数とするとき，x についての方程式 $e^{2x}=k(9x^2+2)$ の解の個数を求めよ．

(1) $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}(9x^2+2)-e^{2x}\cdot 18x}{(9x^2+2)^2}$

$=\dfrac{2(3x-1)(3x-2)e^{2x}}{(9x^2+2)^2}$ //

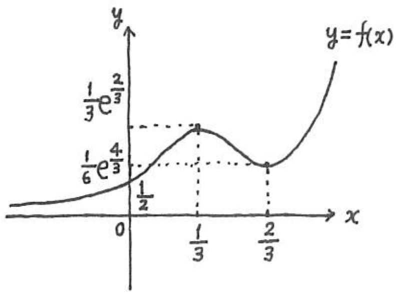
(2) (1) より，$f'(x)=0$ となるのは．$x=\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$ のとき

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$，

$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}}$，$f(\frac{2}{3})=\frac{1}{6}e^{\frac{4}{3}}$

∴ 右のグラフになる．



(3) $\dfrac{e^{2x}}{9x^2+2}=k$ ∴ (2) のグラフと $y=k$ の交点の個数が解の個数に等しいので

$$\begin{cases} 0\text{個} & (k\leqq 0 \text{ のとき}) \\ 1\text{個} & (0<k<\frac{1}{6}e^{\frac{4}{3}},\ \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}}<k \text{ のとき}) \\ 2\text{個} & (k=\frac{1}{6}e^{\frac{4}{3}},\ \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}} \text{ のとき}) \\ 3\text{個} & (\frac{1}{6}e^{\frac{4}{3}}<k<\frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}} \text{ のとき}) \end{cases}$$ //

2014年 工（電気電子工，建築） 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ nを自然数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 任意のnに対し，不等式$n! \geqq 2^{n-1}$が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

(2) $n \geqq 4$のとき，不等式

$$1.7 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 2$$

が成り立つことを示せ．

(1) 数学的帰納法により証明する

(i) $n=1$のとき，

$1! = 2^0$より，成り立つ

(ii) $n=k$のとき，成り立つと仮定する

$k! \geqq 2^{k-1}$ …①

①の両辺に$(k+1)$をかけて，

$(k+1)! \geqq (k+1)\cdot 2^{k-1}$ …②

kは自然数であるから，$k+1 \geqq 2$

$\therefore (k+1)\cdot 2^{k-1} \geqq 2\cdot 2^{k-1}$

$= 2^{(k+1)-1}$ …③

②，③より，$(k+1)! \geqq 2^{(k+1)-1}$

$\therefore n=k+1$のとき，成り立つ

(i)，(ii)より，任意の自然数nに対して，

$n! \geqq 2^{n-1}$が成り立つ ▨

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \geqq 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$ （$\because n \geqq 4$より）

$= \dfrac{41}{24}$ （$= 1.70833\cdots$）

> 1.7

(1)より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}}$ 無限等比級数の和，初項1，公比$\frac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$= 2$

以上より，$1.7 < \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < 2$ （$n \geqq 4$）が成り立つ ▨