

1  $n, m$  を 0 以上の整数とし,

$$I_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \sin^m \theta d\theta$$

とおく. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1)  $n \geq 2$  のとき,  $I_{n,m}$  を  $I_{n-2,m+2}$  を使って表せ.

(2) 次の式

$$I_{2n+1,2m+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

を示せ.

(3) 次の式

$$\frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{{}^m C_0}{n+1} - \frac{{}^m C_1}{n+2} + \cdots + (-1)^m \frac{{}^m C_m}{n+m+1}$$

を示せ. ただし  $0! = 1$  とする.

(千葉大学 2014)