＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=\log(1+x^2)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx$ を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ の増減を調べ，$y=f'(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) 曲線 $C:y=f(x)$ と曲線 C の互いに直交している 2 本の接線とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

（旭川医科大学　2014）

$\boxed{2}$ xy 平面において，関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が表す曲線を C とし，C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ を考える．ただし，$t>0$ とする．点 P における曲線 C の接線が x 軸と交わる点を Q とする．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) 点 Q の座標を求めよ．

(2) 曲線 C，x 軸，直線 $x=t$，および点 Q を通り x 軸に垂直な直線で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(3) 線分 PQ の長さを $L(t)$ とする．点 P が C 上を動くとき，$L(t)$ の最小値を求めよ．

（茨城大学　2015）

0001820639718999

旭川医科大学

2014年 医学部 第1問

1 関数 $f(x) = \log(1 + x^2)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log(1 + x^2)\, dx$ を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ の増減を調べ，$y = f'(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) 曲線 $C : y = f(x)$ と曲線 C の互いに直交している2本の接線とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 (x)'\log(1+x^2)\,dx = \Big[x\log(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$

$\displaystyle = \log 2 - \Big[2x\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$\displaystyle = \log 2 - 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$

$\displaystyle = \underline{\log 2 + \frac{\pi}{2} - 2}$ //

(2) $\displaystyle f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

$\displaystyle f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$

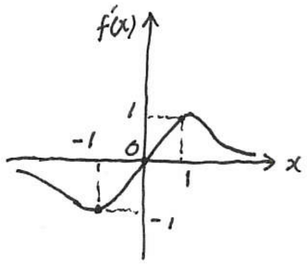
$\therefore$ $f''(x) = 0$ となるのは．$x = \pm 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↘	-1	↗		↘

極小　1 (極大)

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ ，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0$

$\therefore$ $y = f'(x)$ のグラフは右のようになる



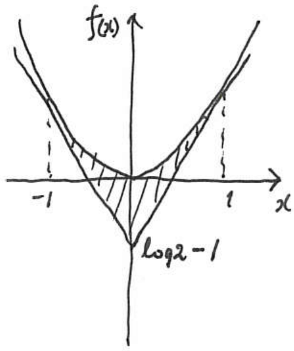
(3) (2)より．$f'(\alpha)\cdot f'(\beta) = -1$ かつ．$\alpha < \beta$ となるのは．

$\alpha = -1$，$\beta = 1$ のときのみである．($\because$ $|f'(x)| \leqq 1$ がすべての x で成り立つ)

このとき．2本の接線は．

$$\begin{cases} y = -x - 1 + \log 2 \\ y = x - 1 + \log 2 \end{cases}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗



$\displaystyle\therefore\ S = 2\int_0^1 \log(1+x^2) - \{+x - 1 + \log 2\}\,dx$

$\displaystyle = 2\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx + 2\int_0^1 -x + 1 - \log 2\,dx \overset{(1)より}{=} \underline{\pi - 3}$ //

2015年 工学部 第4問

$\boxed{4}$ xy 平面において，関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が表す曲線を C とし，C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ を考える．ただし，$t>0$ とする．点Pにおける曲線 C の接線が x 軸と交わる点をQとする．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) 点Qの座標を求めよ．

(2) 曲線 C，x 軸，直線 $x=t$，および点Qを通り x 軸に垂直な直線で囲まれた部分を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．

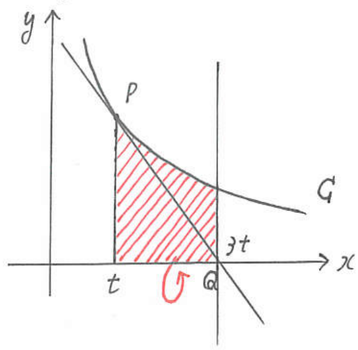
(3) 線分PQの長さを $L(t)$ とする．点Pが C 上を動くとき，$L(t)$ の最小値を求めよ．

(1) $y=x^{-\frac{1}{2}}$ より．$y'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}$

∴ 接線は．$y=-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}(x-t)+\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$\therefore\ y=-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}x+\dfrac{3}{2\sqrt{t}}$

$\therefore\ 0=-\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}x+\dfrac{3}{2\sqrt{t}}$ より $x=3t$　　$\therefore\ \underline{Q(3t,0)}$ //



(2) $V=\pi\int_t^{3t}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$

$=\pi\int_t^{3t}\dfrac{1}{x}dx$

$=\pi\left[\log x\right]_t^{3t}$

$=\pi(\log 3t-\log t)$

$=\underline{\pi\log 3}$ //

(3) $\{L(t)\}^2=(3t-t)^2+\left(0-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^2$

$=4t^2+\dfrac{1}{t}$

$=4t^2+\dfrac{1}{2t}+\dfrac{1}{2t}$

$\geqq 3\sqrt[3]{4t^2\cdot\dfrac{1}{2t}\cdot\dfrac{1}{2t}}$　(相加・相乗平均の関係)

$=3$　　等号成立は $4t^2=\dfrac{1}{2t} \iff t=\dfrac{1}{2}$ のとき

∴ $\underline{最小値\ \sqrt{3}\ (t=\frac{1}{2}のとき)}$ //