

1 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  を考える.

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{2n(n+1)}{3n - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 不等式  $a_n < n$  を数学的帰納法によって証明せよ.
- (2) 数列  $\{b_n\}$  を  $b_n = \frac{n}{n - a_n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定める.  $b_{n+1}$  を  $b_n$  を用いて表せ.
- (3) 数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ.
- (4) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.
- (5) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$  および  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 a_3 a_4 \cdots a_n}{n!}$  を求めよ.

2014年 第3問

3 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  を考える.

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{2n(n+1)}{3n - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、以下の問いに答えよ.

- (1) 不等式  $a_n < n$  を数学的帰納法によって証明せよ.
- (2) 数列  $\{b_n\}$  を  $b_n = \frac{n}{n - a_n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定める.  $b_{n+1}$  を  $b_n$  を用いて表せ.
- (3) 数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ.
- (4) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.
- (5) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$  および  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 a_3 a_4 \cdots a_n}{n!}$  を求めよ.

(1) 数学的帰納法により示す.

(i)  $n = 1$  のとき.  $a_1 = 0$  より.  $a_1 < n$  が成り立つ

(ii)  $n = k$  のとき 成り立つと仮定すると.  $a_k < k$

$$\text{このとき. } a_{k+1} = \frac{2k(k+1)}{3k - a_k} < \frac{2k(k+1)}{3k - k} = k+1 \quad \therefore n = k+1 \text{ のときも成り立つ}$$

(i), (ii) より.  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して.  $a_n < n$  が成り立つ  $\square$

$$(2) \quad b_n = \frac{n}{n - a_n} \iff n \cdot b_n - a_n b_n = n \iff a_n = \frac{n(b_n - 1)}{b_n} \quad \leftarrow \begin{array}{l} b_n > 0 \text{ より} \\ \text{両辺 } b_n \text{ で割った} \end{array}$$

$$\text{与式に代入すると. } \frac{(n+1) \cdot (b_{n+1} - 1)}{b_{n+1}} = \frac{2n(n+1)}{3n - \frac{n(b_n - 1)}{b_n}}$$

$$\therefore \text{これを整理すると. } \underline{b_{n+1} = 2b_n + 1} //$$

$$(3) \quad b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1) \quad \therefore \text{数列 } \{b_n + 1\} \text{ は初項 } b_1 + 1 = 2, \text{ 公比 } 2 \text{ の} \\ \text{等比数列なので, } b_n + 1 = 2^n \quad \therefore \underline{b_n = 2^n - 1} //$$

$$(4) \quad b_n = \frac{n}{n - a_n} \text{ より. } \underline{a_n = \frac{n \cdot (2^n - 2)}{2^n - 1}} //$$

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 2}{2^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2^n}} = \underline{1} //$$

(5) のつづき.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 a_3 \cdots a_n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{30}{31} \cdots \frac{2^n - 2}{2^n - 1} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} \\ = \underline{\frac{1}{2}} //$$