$\boxed{1}$ 座標平面上の 3 点 A$(0,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(x,\ y)$ を考える．ただし $y > 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1) △ABC が二等辺三角形であるとする．そのとき x，y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ．

(2) △ABC が鋭角三角形であるとする．そのとき x，y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ．

(3) 3 つの角 ∠CAB，∠ABC，∠BCA をそれぞれ α，β，γ とし，不等式

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする．そのとき x，y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ．

(4) x，y が (3) の条件を満たすとき，γ がとりうる値の範囲を求めよ．

（広島大学　2009）

$\boxed{2}$ 曲線 $y = e^x$ 上の点 A$(0,\ 1)$ における接線を ℓ とし，点 B$(0,\ 2)$ を通り直線 ℓ に平行な直線を m とする．直線 m と曲線 $y = e^x$ の 2 つの交点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β（ただし $\alpha < \beta$）とする．直線 $x = \alpha$ と直線 ℓ の交点を P′，直線 $x = \beta$ と直線 ℓ の交点を Q′ とする．次の問いに答えよ．

(1) 平行四辺形 PP′Q′Q の面積 S を α，β で表せ．

(2) 直線 m と曲線 $y = e^x$ によって囲まれる図形の面積 T を α，β の多項式で表せ．

(3) 線分 PQ の中点 R は第 2 象限にあることを示せ．

(4) $\alpha + \beta > -1$ であることを示せ．

（広島大学　2009）

$\boxed{3}$ 四面体OABCにおいて，

$$\angle \mathrm{AOB} = \angle \mathrm{AOC} = \frac{\pi}{2},\ \angle \mathrm{BOC} = \frac{\pi}{3},\ \mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 2,\ \mathrm{OC} = 1$$

とする．3 点 A，B，C を通る平面上の点 P を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，$\vec{p}$ は実数 s，t を用いて

$$\vec{p} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表される．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$，$\vec{p}\cdot\vec{b}$，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ を s，t を用いて表せ．

(2) 点Pが $\angle \mathrm{AOP} = \angle \mathrm{BOP} = \angle \mathrm{COP}$ を満たすとき，s，t の値を求めよ．

(3) (2) の条件を満たす点Pについて，直線APと直線BCの交点をQ，直線BPと直線ACの交点をRとする．BQ：QC およびAR：RCを求めよ．

(4) (2) の条件を満たす点Pについて，3 つの四面体OABP，OBCP，OCAPの体積の比を求めよ．

（広島大学　2009）

$\boxed{4}$ 2 人のプレーヤー A，B が対戦を繰り返すゲームを行う．1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり，B が勝つ確率は $1-p$ であるとする (ただし $0 < p < 1$)．A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている．1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る．対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき，ゲームを終了する．ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする．ただし n は自然数とする．

(1) P_4 を求めよ．

(2) P_{2n-1} を求めよ．

(3) P_{2n} を求めよ．

(4) $2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ．

(5) $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ とする．p と S の大小関係を調べよ．

（広島大学　2009）

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ．ただし，n は自然数を表す．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式

$$\frac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) 次の値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)$$

で定めるとき，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

（広島大学　2008）

$\boxed{6}$ 2 点 A，B と，その上を動く 1 個の石がある．この石は，時刻 $t=0$ では点 A にあり，その後，次の規則 (a)，(b) にしたがって動く．

各 $t=0$，1，2，$\cdots$ に対して，

(a) 時刻 t に石が点 A にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 A にある確率は c，点 B にある確率は $1-c$ である．

(b) 時刻 t に石が点 B にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 B にある確率は $2c$，点 A にある確率は $1-2c$ である．

ただし，c は $0<c<\dfrac{1}{2}$ を満たす定数とする．

いま，n を自然数とし，時刻 $t=n$ において石が点 A にある確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n と c を用いて表せ．

(3) p_n を求めよ．

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}p_n$ を求めよ．

（広島大学　2008）

7 平面上のベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ は，その大きさがともに $\sqrt{2}$ であり，なす角が 120° である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ を求めよ．

(2) k，ℓ を整数とするとき，$|k\overrightarrow{a}+\ell\overrightarrow{b}|^2$ は偶数であることを示せ．

(3) (2) で，k または ℓ が奇数のとき，$|k\overrightarrow{a}+\ell\overrightarrow{b}|^2$ は 4 の倍数ではないことを示せ．

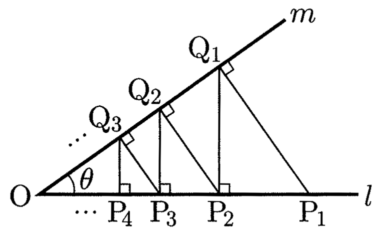
(4) m，n が整数であり，$m=n=0$ ではないならば，$|m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}|$ は整数ではないことを示せ．

（広島大学　2008）

8 下図のように，点 O から出る 2 本の半直線 ℓ，m があり，ℓ と m のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．ℓ 上に $\mathrm{OP}_1=1$ となるように点 P_1 を定め，

P_1 から m に垂線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ を下ろし，
Q_1 から ℓ に垂線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ を下ろし，
P_2 から m に垂線 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$ を下ろし，
Q_2 から ℓ に垂線 $\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_3$ を下ろす．

同様にくりかえして，点 P_n，Q_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を定め，三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とする．



次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ．

(3) $S=\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求め，$\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表せ．

(4) (3) で求めた S を θ の関数と考えて，S の最大値を求めよ．ただし，その最大値を与える θ の値は求めなくてよい．

（広島大学　2008）

$\boxed{9}$ 座標空間の 2 点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ -1,\ 0)$ および

$$\vec{u} = (-1,\ 2,\ 5),\quad \vec{v} = (1,\ 1,\ 1),\quad \vec{w} = (-1,\ 3,\ 1)$$

と成分表示される 3 つのベクトルがある．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ．

(2) 上で求めた点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 C$(0,\ 0,\ c)$ を求めよ．

(3) 上で求めた点 P と C に対し，P は 3 点 A，B，C の定める平面上にあることを示せ．

（広島大学　2007）

$\boxed{10}$ $f(x) = \dfrac{8x+21}{3x+8}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$ であることを示せ．

(2) $x \geqq 0$ ならば $f(x) \geqq 2$ であることを示せ．

(3) $x \geqq 2,\ y \geqq 2$ ならば

$$|f(x) - f(y)| \leqq \frac{|x-y|}{100}$$

となることを示せ．

(4) $x \geqq 2$ ならば

$$|f(f(x)) - \sqrt{7}| \leqq \frac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$$

となることを示し，これを用いて $|r-\sqrt{7}| < 10^{-4}$ を満たす有理数 r を 1 つ求めよ．

（広島大学　2007）

$\boxed{11}$ $0 < b < a$ を満たす定数 a，b に対し，2 つの楕円

$$A: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad B: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

を考える．また α，β は

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間の実数とする．次の問いに答えよ．

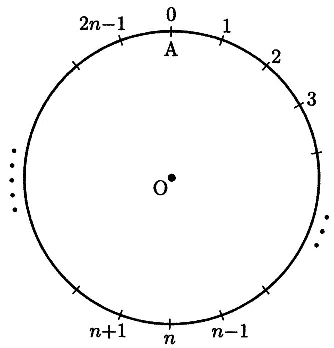
(1) $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

(2) 2 つの楕円 A，B の第 1 象限にある交点の座標を求めよ．

(3) 楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S を a，b，β を用いて表せ．

（広島大学　2007）

$\boxed{12}$ n を 2 以上の整数とする．中心を O とする円の周を $2n$ 等分して，図のように 0 から $2n-1$ までの目盛りを付ける．目盛りが 0 の点を A とする．一方，袋の中に 1 から $2n-1$ までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている．この袋から玉を 2 つ取り出して，玉に書かれた数と同じ目盛りを持つ 2 点をとる．2 点のうち，目盛りの大きい方を B，目盛りの小さい方を C として，△ABC を考える． 次の問いに答えよ．



(1) 辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか．

(2) △ABC の辺上に点 O がある確率を求めよ．

(3) △ABC の内部に点 O がある確率は $\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$ であることを示せ．

(4) △ABC の辺上に点 O があるとき $X = 1$，△ABC の内部に点 O があるとき $X = 2$，それ以外のとき $X = 0$ とする．X の期待値を求めよ．

（広島大学　2007）

$\boxed{13}$ $a_1=2$, $a_2=1$ と $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $b_n=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列であることを示せ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k$ を n の式で表せ．

(3) a_n を n の式で表せ．

(4) 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ の収束，発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ．

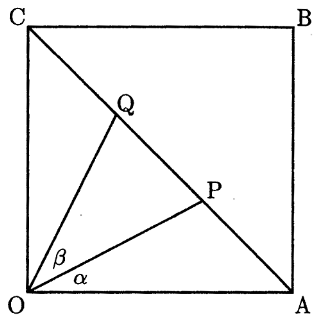
（広島大学　2006）

$\boxed{14}$ 正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，C に近い点を Q とする．また，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ．

(2) $\alpha < \dfrac{\pi}{6} < \beta$ を示せ．

(3) 線分 PQ 上に点 R を $\angle\mathrm{POR}=\alpha$ となるようにとる．このとき，比 AR : RC を求めよ．



（広島大学　2006）

$\boxed{15}$ 関数 $f(x)=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減と極値を調べて，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2) $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ の交点が，3 個になるような m の値の範囲を求めよ．

(3) $m<0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ で囲まれた二つの部分の面積の和を求めよ．

（広島大学　2006）

広島大学

2008年 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

[2] 次の問いに答えよ．ただし，n は自然数を表す．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式

$$\frac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) 次の値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)$$

で定めるとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(2) 区分求積法より.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=\int_0^1 x^5\,dx$$

$$=\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1$$

$$=\underline{\frac{1}{6}}\ //$$

(1) $f(x)=\frac{x}{n}-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)$ とおくと.

$$f'(x)=\frac{1}{n}-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}$$

$$=\frac{x}{n(n+x)}$$

∵ n：自然数，$0\leqq x\leqq 1$ であるから，$f'(x)\geqq 0$

∴ $f(x)$ は単調増加であり，$f(x)\geqq f(0)=0$　すなわち．$\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\leqq\frac{x}{n}$.

$g(x)=\log\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n+1}$ とおくと.

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1-x}{(n+x)(n+1)}$$

n：自然数，$0\leqq x\leqq 1$ であるから．$g'(x)\geqq 0$　∴ $g(x)$ は単調増加であり．$g(x)\geqq g(0)=0$

すなわち．$\frac{x}{n+1}\leqq\log\left(1+\frac{x}{n}\right)$　以上より．与えられた不等式が成り立つ ▨

広島大学

2008年 第2問　　2枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．ただし，n は自然数を表す．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式

$$\frac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) 次の値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)$$

で定めるとき，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(3) $\log a_n = \log\left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n}\right) \quad \cdots ①$$

いま，$1 \leqq k \leqq n$ より，$\frac{1}{n} \leqq \frac{k}{n} \leqq 1$ なので (1) より，$x = \left(\frac{k}{n}\right)^5$ とおくと，

$0 \leqq x \leqq 1$ をみたしている．よって，$\dfrac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n+1} \leqq \log\left(1+\dfrac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n}\right) \leqq \dfrac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n} \quad \cdots ②$

①，② より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n+1} \leqq \log a_n \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n}$

$n\to\infty$ とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^5}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5}_{(2)\text{より}\to\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$ （左辺）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 = \frac{1}{6} \quad （右辺）$$

はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n = \frac{1}{6}$　$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\log a_n} = \underline{e^{\frac{1}{6}}}$

（$\because$ $y = e^x$ は連続関数であることから）