

1 $0 < \theta < \pi$ とする. 単位円の周上の 3 点 $A(1, 0)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$, $C(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の面積を θ を用いて表せ. また, $\triangle ABC$ の面積の最大値とそのときの θ の値を求めよ.

2 $a > 0$ とする. $x > 0$ で定義された関数 $y = x^2 + ax - 3a^2 \log x$ のグラフが x 軸と共有点をもつような a の範囲を求めよ.

3 以下の問いに答えよ.

(1) $y = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) の増減および極値を調べ, このグラフの概形をかけ.

(2) $\int_0^1 xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ を求めよ.

4 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ のグラフの概形をかけ.

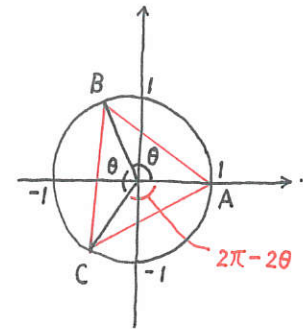
(2) 定積分 $\int_1^2 x\sqrt{2-x} dx$ を求めよ.



2016年理工学部第2問

2 $0 < \theta < \pi$ とする. 単位円の周上の3点 $A(1, 0)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$, $C(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の面積を θ を用いて表せ. また, $\triangle ABC$ の面積の最大値とそのときの θ の値を求めよ.

$$\begin{aligned} \Delta ABC &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin (2\pi - 2\theta) \\ &= \sin \theta + \frac{1}{2} \sin (-2\theta) \\ &= \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ &= \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ &= \underline{\sin \theta (1 - \cos \theta)} \quad \text{〃} \end{aligned}$$



$\triangle ABC$ の面積を $f(\theta)$ で表すと,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos \theta (1 - \cos \theta) + \sin \theta \cdot \sin \theta \\ &= \cos \theta - \cos^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta \\ &= -2 \cos^2 \theta + \cos \theta + 1 \\ &= -(2 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) \end{aligned}$$

$0 < \theta < \pi$ より, $\cos \theta - 1 < 0$ であり

増減表は右のようになる.

θ	(0)	\cdots	$\frac{2}{3}\pi$	\cdots	(π)
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	(0)	\nearrow	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	\searrow	(0)

$\therefore \triangle ABC$ の面積の最大値は $\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$ ($\theta = \frac{2}{3}\pi$ のとき) 〃

2016年工学部第1問


 数理
石井K

1 $a > 0$ とする. $x > 0$ で定義された関数 $y = x^2 + ax - 3a^2 \log x$ のグラフが x 軸と共有点をもつような a の範囲を求めよ.

$$\begin{aligned}
 y' &= 2x + a - \frac{3a^2}{x} \\
 &= \frac{2x^2 + ax - 3a^2}{x} \\
 &= \frac{(2x + 3a)(x - a)}{x}
 \end{aligned}$$

x	(0)	\cdots	a	\cdots	(∞)
y'		$-$		$+$	
y	(∞)	\searrow		\nearrow	

$y' = 0$ となるのは, $x > 0, a > 0$ より, $x = a$ のとき

増減表より, 最小値は $2a^2 - 3a^2 \log a$

\therefore x 軸と共有点をもつのは,

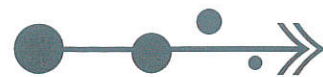
$$2a^2 - 3a^2 \log a \leq 0 \text{ のとき}$$

$$\therefore a^2(2 - 3 \log a) \leq 0$$

$a > 0$ より, $a^2 > 0$ であるから, $2 - 3 \log a \leq 0$

$$\therefore \log a \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore \underline{a \geq e^{\frac{2}{3}}}$$



2016年教育・生物資源第4問



4 以下の問いに答えよ。

(1) $y = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) の増減および極値を調べ、このグラフの概形をかけ。(2) $\int_0^1 xe^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) y' &= 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + x \cdot (-xe^{-\frac{1}{2}x^2}) \\ &= (1+x)(1-x)e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

x	-2	...	-1	...	1	...	2
y'		-	0	+	0	-	
y	$-\frac{2}{e^2}$	\searrow	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	\nearrow	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	\searrow	$\frac{2}{e^2}$

 \therefore 増減表は右上のようになり、

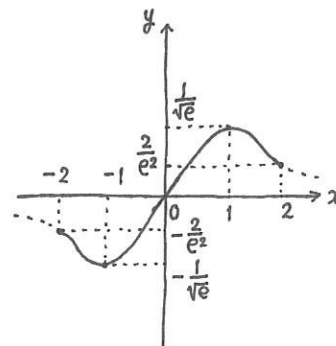
グラフは右のようになる。

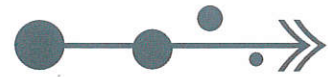
(2) (与式) $= \int_0^1 (-e^{-\frac{1}{2}x^2})' dx$

$$= [-e^{-\frac{1}{2}x^2}]_0^1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{e}} - (-1)$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{1}{\sqrt{e}}}}$$





2016年理系第1問



1 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ のグラフの概形をかけ。(2) 定積分 $\int_1^2 x\sqrt{2-x} dx$ を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad y' &= -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)^2 - x^2}{x^2(x-1)^2} \\ &= \frac{-2x+1}{x^2(x-1)^2} \end{aligned}$$

x	...	0	...	$\frac{1}{2}$...	1	...
y'	+	/	+	0	-	/	-
y	↗	/	↗	-4	↘	/	↘

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$$

∴ グラフの概形は右のようになる。

(2) $t = 2-x$ として置換積分する。

$$dt = -dx, \quad \begin{array}{l} x \parallel 1 \rightarrow 2 \\ t \parallel 1 \rightarrow 0 \end{array}$$

$$(\text{与式}) = \int_1^0 (2-t)\sqrt{t} \cdot (-dt)$$

$$= \int_0^1 2t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} dt$$

$$= \left[\frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2}{5}$$

$$= \frac{14}{15} //$$

