$\boxed{1}$ 次の問に答えよ．

(1) 整数 α，β の少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ は奇数であることを示せ．

(2) n を奇数とする．このとき $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$ をみたす整数 α，β は存在しないことを示せ．

(3) c を実数とする．このとき 3 次方程式 $x^3-2018x+c=0$ の解のうち整数であるものは 1 個以下であることを示せ．

（名古屋大学　2018）

$\boxed{2}$ 次の問に答えよ．

(1) 次の条件 $(*)$ を満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．

$(*)$　$a<b<c$　かつ　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$ である．

(2) 偶数 $2n$ $(n \geqq 1)$ の 3 つの正の約数 p，q，r で，$p>q>r$ と $p+q+r=n$ を満たす組 $(p,\ q,\ r)$ の個数を $f(n)$ とする．ただし，条件を満たす組が存在しない場合は，$f(n)=0$ とする．n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ．また，$f(n)=M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ．

（名古屋大学　2017）

$\boxed{3}$ 正の整数 n に対して，その（1 と自分自身も含めた）すべての正の約数の和を $s(n)$ と書くことにする．このとき，次の問に答えよ．

(1) k を正の整数，p を 3 以上の素数とするとき，$s(2^kp)$ を求めよ．

(2) $s(2016)$ を求めよ．

(3) 2016 の正の約数 n で，$s(n)=2016$ となるものをすべて求めよ．

（名古屋大学　2016）

$\boxed{4}$ k，m，n は整数とし，$n \geqq 1$ とする．${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める．

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k,\quad S_k(1)=1\quad (k \geqq 0)$$

$$\begin{aligned}T_m(n)&={}_m\mathrm{C}_1S_1(n)+{}_m\mathrm{C}_2S_2(n)+{}_m\mathrm{C}_3S_3(n)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}S_{m-1}(n)\\&=\sum_{k=1}^{m-1}{}_m\mathrm{C}_kS_k(n)\quad (m \geqq 2)\end{aligned}$$

(1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ．

(2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ．

(3) p が 7 以上の素数のとき，$S_1(p-1)$，$S_2(p-1)$，$S_3(p-1)$，$S_4(p-1)$ は p の倍数であることを示せ．

（名古屋大学　2013）

5 m，p を 3 以上の奇数とし，m は p で割り切れないとする．

(1) $(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ．

(2) $(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ．

(3) $(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れないことを示せ．

(4) r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする．2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ．

（名古屋大学　2012）

6 m を正の奇数とする．

(1) $(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ．

(2) p を正の整数とするとき，$(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ．

(3) r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする．2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ．

（名古屋大学　2012）

7 a，b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし，x と y の 2 次方程式

$$x^2+ax+b=0, \quad y^2+by+a=0$$

がそれぞれ整数解をもつとする．

(1) $a=b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ．

(2) $a>b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

（名古屋大学　2011）

8 xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ．

(1) $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x$ のグラフ上に無限個の格子点が存在することを示せ．

(2) a，b は実数で $a \neq 0$ とする．$y=ax^2+bx$ のグラフ上に，点 $(0,\ 0)$ 以外に格子点が 2 つ存在すれば，無限個存在することを示せ．

（名古屋大学　2010）