______ 年　番号 ______　氏名 ______________________________

$\boxed{1}$ $0 \leqq x \leqq 3$ のとき，次の x の関数の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

$$f(x) = \frac{1}{5-x} + \frac{1}{3+x}$$

（倉敷芸術科学大学　2015）

$\boxed{2}$ 実数 m，n は，$m+n=17$ を満たす．2^m+4^n を最小にする m，n の値をそれぞれ a，b とするとき，$\left|\dfrac{96a}{35b}\right|$ の値を求めよ．

（自治医科大学　2016）

倉敷芸術科学大学

2015年 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ $0 \leqq x \leqq 3$ のとき，次の x の関数の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

$$f(x) = \frac{1}{5-x} + \frac{1}{3+x}$$

$$f(x) = \frac{3+x+5-x}{(5-x)(3+x)}$$

$$= \frac{8}{-x^2+2x+15}$$

$$= \frac{8}{-(x-1)^2+16}$$

ここで，$g(x) = -(x-1)^2+16$ とおくと，

$0 \leqq x \leqq 3$ において，$g(x)$ の最大値は 16（$x=1$ のとき），

最小値は 12（$x=3$ のとき）

$\therefore$ $f(x)$ の最大値は $\frac{2}{3}$（$x=3$ のとき），最小値は $\frac{1}{2}$（$x=1$ のとき）//

自治医科大学

2016年 医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 実数 m, n は, $m+n=17$ を満たす. 2^m+4^n を最小にする m, n の値をそれぞれ a, b とするとき, $\left|\dfrac{96a}{35b}\right|$ の値を求めよ.

$n=17-m$ より,

$$\begin{aligned}2^m+4^n &= 2^m+4^{17-m}\\ &= 2^m+2^{34-2m}\\ &= 2^{m-1}+2^{m-1}+2^{34-2m}\\ &\geqq 3\sqrt[3]{2^{m-1}\cdot 2^{m-1}\cdot 2^{34-2m}}\\ &= 3\sqrt[3]{2^{32}}\end{aligned}$$

ポイント

3つの場合の相加・相乗平均の関係

$a, b, c>0$ のとき, $a+b+c \geqq 3\sqrt[3]{abc}$

(等号成立は $a=b=c$ のとき)

等号成立は, $m-1=34-2m \iff m=\dfrac{35}{3}$, $n=\dfrac{16}{3}$

$$\therefore \left|\frac{96a}{35b}\right| = \left|96\cdot\frac{35}{3}\cdot\frac{1}{35}\cdot\frac{3}{16}\right| = \underline{6}$$

(別) $t=2^m$ とおくと, $2^m+4^n = t+\dfrac{2^{34}}{t^2}$

これを $f(t)$ とおいて微分しても求められる.

(研究) $x>0$ とする.

$2x+\dfrac{1}{x^2}$ ← 2つの場合の相加・相乗は使えない($\sqrt{\ }$ の中に x が残る)

↓ こうすると…

$x+x+\dfrac{1}{x^2}$ ← 3つの場合の相加・相乗が使える!

$$\begin{aligned}x+x+\frac{1}{x^2} &\geqq 3\sqrt[3]{x\cdot x\cdot\frac{1}{x^2}}\\ &= 3\end{aligned}$$

等号成立は, $x=x=\dfrac{1}{x^2} \iff x^3=1$

$\iff x=1$