＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ a，b，c を実数とし，

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とおく．曲線 $C : y = f(x)$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある．

(1) P における C の接線の方程式を求めよ．

(2) P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を s，t，a の関係式として求めよ．

(3) (2) の条件のもとで，線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ．

（北海道大学　2016）

$\boxed{2}$ $f(x) = |x(x-2)| + |(x-1)(x-4)| + 3x - 10$ $(-2 \leqq x \leqq 4)$ とおく．

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ．グラフと x 軸との 2 つの交点の x 座標 α，β $(\alpha < \beta)$ の値も求めよ．

(2) (1) の α，β に対して，定積分 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ の値を求めよ．

（北海道大学　2016）

$\boxed{3}$ $\triangle\mathrm{ABC}$ が，$\mathrm{AB} = 2$，$\mathrm{AC} = 1 + \sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$ をみたすとする．

(1) $\beta = \angle\mathrm{ABC}$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ．

(2) (1) の β の値をすべて求めよ．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とする．$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をみたす実数 s，t を求めよ．

（北海道大学　2016）

北海道大学

2016年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ a, b, c を実数とし,

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とおく. 曲線 $C : y = f(x)$ 上に異なる2点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$, $\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある.

(1) Pにおける C の接線の方程式を求めよ.

(2) Pにおける C の接線とQにおける C の接線が平行になるための条件を s, t, a の関係式として求めよ.

(3) (2)の条件のもとで, 線分PQの中点が C 上にあることを示せ.

(1) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

∴ Pにおける C の接線は,

$y = (3s^2 + 2as + b)(x - s) + s^3 + as^2 + bs + c$

∴ $\underline{y = (3s^2 + 2as + b)x - 2s^3 - as^2 + c}$ //

(2) (1)と同様にして, Qにおける C の接線は,

$y = (3t^2 + 2at + b)x - 2t^3 - at^2 + c$

∴ 2本の接線が平行 $\iff 3s^2 + 2as + b = 3t^2 + 2at + b$

$\iff 3(s+t)(s-t) + 2a(s-t) = 0$

$\iff (s-t)(3s + 3t + 2a) = 0$

P≠Qより, $s \neq t$ であるから, $3s + 3t + 2a = 0$

∴ $\underline{s + t = -\frac{2}{3}a}$ //

(3) 線分PQの中点を $\mathrm{M}(X, Y)$ とおくと,

$\underline{X = \frac{s+t}{2} = -\frac{a}{3}}$, $Y = \frac{f(s)+f(t)}{2} = \frac{1}{2}(s^3+t^3) + \frac{a}{2}(s^2+t^2) + \frac{b}{2}(s+t) + c$

これを使ってYの式変形をする.

$= \frac{1}{2}(s+t)(s^2 - st + t^2) + \frac{a}{2}(s^2+t^2) + \frac{b}{2}(s+t) + c$

$= X\{(2X)^2 - 3st\} + \frac{a}{2}\{(2X)^2 - 2st\} + bX + c$

$= 4X^3 - 3stX + 2aX^2 - ast + bX + c$

$= X^3 + aX^2 + bX + c + (3X^3 + aX^2 - 3stX - ast)$

$= X^3 + aX^2 + bX + c + (3X^3 - 3X^3 - 3stX + 3stX)$

$= X^3 + aX^2 + bX + c$ ∴ 中点Mは C 上にある ▨

0002188901187999

北海道大学

2016年 文系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10$ $(-2 \leqq x \leqq 4)$ とおく.

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ．グラフと x 軸との2つの交点の x 座標 α, β $(\alpha<\beta)$ の値も求めよ.

(2) (1)の α, β に対して，定積分 $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ の値を求めよ.

(1) (i) $-2 \leqq x < 0$ のとき

$x(x-2)>0$, $(x-1)(x-4)>0$ なので

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10\\
&= 2x^2-4x-6\\
&= 2(x+1)(x-3)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $-2 \leqq x<0$ より，x 軸との交点の x 座標は -1

(ii) $0 \leqq x < 1$ のとき

$x(x-2) \leqq 0$, $(x-1)(x-4)>0$ なので

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10\\
&= -6
\end{aligned}
$$

x 軸との交点はなし

(iii) $1 \leqq x < 2$ のとき

$x(x-2)<0$, $(x-1)(x-4) \leqq 0$ なので

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10\\
&= -2x^2+10x-14\\
&= -2(x^2-5x+7)\\
&= -2\Big\{\underbrace{\left(x-\tfrac{5}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}}_{>0}\Big\}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ x 軸との交点はなし.

(iv) $2 \leqq x \leqq 4$ のとき.

$x(x-2) \geqq 0$, $(x-1)(x-4) \leqq 0$ なので

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10\\
&= 6x-14
\end{aligned}
$$

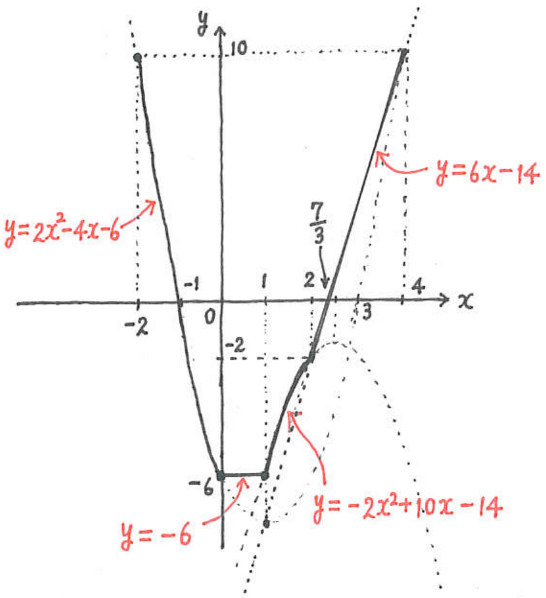
$2 \leqq x \leqq 4$ より，x 軸との交点の x 座標は．$\frac{7}{3}$

(i)〜(iv)より，

$$
f(x)=\begin{cases}
2x^2-4x-6 & (-2 \leqq x<0)\\
-6 & (0 \leqq x<1)\\
-2x^2+10x-14 & (1 \leqq x<2)\\
6x-14 & (2 \leqq x \leqq 4)
\end{cases}
$$

$\therefore$ $y=f(x)$ のグラフは下のようになる

また，$\underline{\alpha=-1,\ \beta=\frac{7}{3}}$ //



(2) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{7}{3}} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 2x^2-4x-6\,dx$

$\displaystyle + \int_0^1 -6\,dx + \int_1^2 -2x^2+10x-14\,dx$

$\displaystyle + \int_2^{\frac{7}{3}} 6x-14\,dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x\right]_{-1}^{0} -6 + \left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-14x\right]_1^2$

$+ \left[3x^2-14x\right]_2^{\frac{7}{3}}$

$= \underline{-\frac{40}{3}}$ //

2016年 文系 第3問

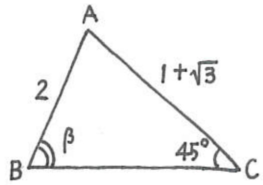
数理 石井K

3 △ABCが，AB = 2，AC = $1+\sqrt{3}$，∠ACB = 45° をみたすとする．

(1) $\beta = \angle ABC$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ．

(2) (1)の β の値をすべて求めよ．

(3) △ABCの外接円の中心をOとする．△ABCが鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ をみたす実数 s，t を求めよ．



(1) 正弦定理より，

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sin\beta} \qquad \therefore \underline{\sin\beta = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}\,//$$

$$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$$
$$= 1 - 2\cdot\frac{8+4\sqrt{3}}{16}$$
$$= \underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\,//$$

(2) $0 < \beta < 135^\circ$ より，$0 < 2\beta < 270^\circ$

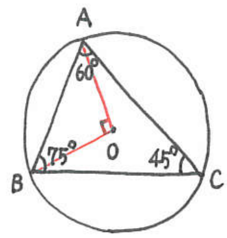
$\therefore \cos 2\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，$2\beta = 150^\circ, 210^\circ$ $\qquad \therefore \underline{\beta = 75^\circ, 105^\circ}\,//$

(3) 正弦定理より，

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = 2R \qquad \therefore R = \sqrt{2}$$

$\therefore |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{2}$，また ∠ACB = 45° より，∠AOB = 90°

よって，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$



ここで

$|\overrightarrow{OC}|^2 = s^2|\overrightarrow{OA}|^2 + \cancel{2st\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}} + t^2|\overrightarrow{OB}|^2$ に代入して

$2 = 2s^2 + 2t^2 \qquad \therefore s^2 + t^2 = 1 \quad \cdots ①$

← 必要なかった

△ABCが鋭角三角形なので (2)より $\beta = 75^\circ$ $\therefore$ ∠AOC = 150°

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos 150^\circ = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$

一方，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\cdot(s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}) = 2s$

$\therefore 2s = -\sqrt{3} \quad \cdots ②$

同様に，∠BAC = 60°より，∠BOC = 120° $\quad \therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos 120^\circ = -1$

一方，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}\cdot(s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}) = 2t$

$\therefore 2t = -1 \quad \cdots ③ \qquad$ ②，③より，$\underline{s = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ t = -\frac{1}{2}}\,//$