＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 1から5までの数字を1つずつ書いた5枚のカードが箱に入っている．箱の中から1枚のカードを取り出してもとに戻すことを n 回続けて行う．k 回目に取り出したカードの数字を a_k とし，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ が偶数である確率を p_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(3) p_n を求めよ．

（島根大学　2016）

$\boxed{2}$ iを虚数単位とし，$z = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) z^5 および $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ の値を求めよ．

(2) $t = z + \dfrac{1}{z}$ とおく．$t^2 + t$ の値を求めよ．

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ．

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の 1 辺の長さの 2 乗を求めよ．

（琉球大学　2016）

島根大学

2016年 教育・生物資源科学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 1から5までの数字を1つずつ書いた5枚のカードが箱に入っている．箱の中から1枚のカードを取り出してもとに戻すことを n 回続けて行う．k 回目に取り出したカードの数字を a_k とし，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ が偶数である確率を p_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(3) p_n を求めよ．

(1) P_1 は a_1 が偶数である確率であるから，$\underline{P_1 = \frac{2}{5}}$ //

P_2 は a_1 と a_2 の偶奇が一致する確率であるから，$\underline{P_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{13}{25}}$ //

(2) $\sum_{k=1}^{n+1} a_k$ が偶数となるのは次の2つの場合である

- $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ が偶数}}_{P_n}$ で，$\underbrace{a_{n+1} \text{ が偶数}}_{\frac{2}{5}}$ の場合

- $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ が奇数}}_{1-P_n}$ で，$\underbrace{a_{n+1} \text{ が奇数}}_{\frac{3}{5}}$ の場合

よって，$P_{n+1} = \frac{2}{5} \cdot P_n + \frac{3}{5}(1 - P_n)$

$\alpha = -\frac{1}{5}\alpha + \frac{3}{5}$

$\therefore \alpha = \frac{1}{2}$

$\therefore \underline{P_{n+1} = -\frac{1}{5}P_n + \frac{3}{5}}$ //

(3) $P_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ 数列 $\left\{P_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $P_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$，公比 $-\frac{1}{5}$ の等比数列

$\therefore P_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$

$\therefore \underline{P_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}}$ //

琉球大学

2016年 理系 第1問

$\boxed{1}$ iを虚数単位とし，$z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$とおく．次の問いに答えよ．

(1) z^5および$z^4+z^3+z^2+z+1$の値を求めよ．
(2) $t=z+\dfrac{1}{z}$とおく．t^2+tの値を求めよ．
(3) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$の値を求めよ．
(4) 半径1の円に内接する正五角形の1辺の長さの2乗を求めよ．

(1) ド・モアブルの定理より．

$$z^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$$
$$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$
$$=\underline{1}\,_{//}$$

$\therefore$ $z^5-1=0$ より，$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq 1$ より，$\underline{z^4+z^3+z^2+z+1=0}\,_{//}$

(2) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ の両辺を $z^2(\neq 0)$ で割って，

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$$

$$\therefore\ \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2+1+\left(z+\frac{1}{z}\right)=0$$

$$\therefore\ \underline{t^2+t=1}\,_{//}$$

(3) $t^2+t-1=0$ より．$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ $\cdots$①

また．$t=z+\dfrac{1}{z}$ より，

$$t=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}$$
$$=2\cos\frac{2\pi}{5}\ \cdots②$$

$0<\dfrac{2\pi}{5}<\dfrac{\pi}{2}$ より．$\cos\dfrac{2\pi}{5}>0$ $\therefore$ ①，② より．$2\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\therefore$ $\underline{\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}\,_{//}$

(4) 一辺の長さをℓとすると余弦定理より．

$$\ell^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\frac{2\pi}{5}$$
$$=\underline{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,_{//}$$