

1  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \beta = \frac{7}{8}$  を満たす実数  $\alpha$ ,  $\beta$  について、次の問いに答えなさい。ただし、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  とする。

- (1)  $\sin 2\alpha$  と  $\cos 2\beta$  の値を求めなさい。
- (2)  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$  が成り立つことを示しなさい。
- (3)  $\frac{\pi}{12} < \beta < \frac{\pi}{6}$  が成り立つことを示しなさい。

(山口大学 2017)

2  $x$ ,  $y$ ,  $z$  を  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$ ,  $0 < z < 1$  を満たす実数とする。面積が 1 の  $\triangle ABC$  において、辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  上にそれぞれ点  $D$ ,  $E$ ,  $F$  を  $\frac{BD}{BC} = x$ ,  $\frac{CE}{CA} = y$ ,  $\frac{AF}{AB} = z$  を満たすようにとる。  $\triangle AFE$  の面積を  $S_1$ ,  $\triangle DEF$  の面積を  $S_2$  とおくと、次の問いに答えなさい。

- (1)  $x = \frac{2}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$ ,  $z = \frac{1}{3}$  のとき、 $S_1$  と  $S_2$  を求めなさい。
- (2)  $S_2$  を  $x$ ,  $y$ ,  $z$  を用いて表しなさい。
- (3)  $\triangle ABC$  の重心と  $\triangle DEF$  の重心が一致し、かつ  $S_2 = \frac{1}{3}$  が成り立つような  $x$ ,  $y$ ,  $z$  の組  $(x, y, z)$  をすべて求めなさい。

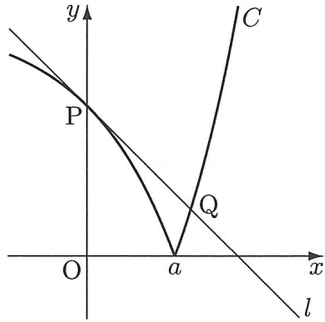
(山口大学 2017)

3  $\alpha = \sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10}$  とするとき、次の問いに答えなさい。ただし、 $i$  は虚数単位である。

- (1) 複素数  $\alpha$  を極形式で表しなさい。ただし、偏角  $\theta$  の範囲は  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする。
- (2) 2 個のさいころを同時に投げて出た目を  $k$ ,  $l$  とするとき、 $\alpha^{kl} = 1$  となる確率を求めなさい。
- (3) 3 個のさいころを同時に投げて出た目を  $k$ ,  $l$ ,  $m$  とするとき、 $\alpha^k$ ,  $\alpha^l$ ,  $\alpha^m$  が異なる 3 つの複素数である確率を求めなさい。

(山口大学 2017)

- 4  $a$  を正の実数とし、関数  $f(x) = |e^x - e^a|$  を考える。  $xy$  平面において、曲線  $y = f(x)$  を  $C$  とし、曲線  $C$  と  $y$  軸との交点を  $P$  とする。点  $P$  における  $C$  の接線を  $l$  とすると、  $C$  と  $l$  は接点  $P$  を含めてちょうど 2 点を共有する。点  $P$  と異なる共有点を  $Q$  とし、点  $Q$  の  $x$  座標を  $b$  とすると、図より  $b > a$  であることが分かる。このとき、次の問いに答えなさい。ただし、必要ならば、関数の極限の公式  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$  を証明なしに用いてもよい。



- (1) 直線  $l$  の方程式を求めなさい。
- (2)  $\lim_{a \rightarrow \infty} (b - a) = \log 2$  が成り立つことを示しなさい。
- (3)  $C$  と  $l$  で囲まれた図形の面積を  $S$  とするとき、極限值  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S}{e^a}$  を求めなさい。

(山口大学 2017)

- 5 3次関数  $f(x) = x^3$  を考える。曲線  $y = f(x)$  上の点  $(a, f(a))$  における接線が、直線  $y = x$  と交わる点を  $(b, b)$  とおく。ただし、  $a^2 \geq 1$  とする。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1)  $b$  を  $a$  を用いて表しなさい。
- (2) 関数  $y = f(x) - x$  の極値を求め、グラフの概形をかきなさい。
- (3)  $a - b = \frac{6}{11}$  となるとき、  $a$  の値を求めなさい。

(山口大学 2017)

- 6  $x, y$  を  $0 < x < 1, 0 < y < 1$  を満たす実数とする。面積が 1 の  $\triangle ABC$  において、辺  $BC, CA, AB$  上にそれぞれ点  $D, E, F$  を  $\frac{BD}{BC} = x, \frac{CE}{CA} = y, \frac{AF}{AB} = \frac{1}{3}$  を満たすようにとる。  $\triangle AFE$  の面積を  $S_1, \triangle DEF$  の面積を  $S_2$  とおくと、次の問いに答えなさい。

- (1)  $x = \frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}$  のとき、  $S_1$  と  $S_2$  を求めなさい。
- (2)  $S_2$  を  $x, y$  を用いて表しなさい。
- (3) 2点  $D, E$  が  $DE \parallel BA$  を満たしながら動くとき、  $S_2$  の最大値を求めなさい。

(山口大学 2017)

- 7 初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  で表す。  $m$  を自然数とすると、次の問いに答えなさい。ただし、  $a \neq 0, r > 0$  とする。

- (1)  $\frac{S_{2m}}{S_m}$  を  $r$  と  $m$  を用いて表しなさい。
- (2)  $\frac{S_{3m}}{S_m}$  を  $r$  と  $m$  を用いて表しなさい。

(3)  $S_m = 4$ ,  $S_{2m} = 20$  のとき,  $S_{6m}$  の値を求めなさい.

(山口大学 2017)

8 1 から 6 までの整数が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードを横一列に並べる. 左から  $n$  番目のカードに書かれた整数を  $a_n$  とするとき, 次の問いに答えなさい.

(1)  $a_3 = 3$  である確率を求めなさい.

(2)  $a_1 > a_6$  である確率を求めなさい.

(3)  $a_1 < a_3 < a_5$  かつ  $a_2 < a_4 < a_6$  である確率を求めなさい.

(山口大学 2017)

9 2 次関数  $f(x) = x^2 + 2ax + 2a^2 - a + 1$  について, 次の問いに答えなさい. ただし,  $a$  は正の定数とする.

(1)  $y = f(x)$  のグラフの頂点の座標を  $a$  を用いて表しなさい.

(2)  $-1 \leq x \leq 1$  における  $f(x)$  の最小値が  $2a$  となる  $a$  の値をすべて求めなさい.

(3)  $-1 \leq x \leq 1$  における  $f(x)$  の最小値を  $m$ , 最大値を  $M$  とするとき,  $3m - 2M + 3 = 0$  を満たす  $a$  の値をすべて求めなさい.

(山口大学 2017)

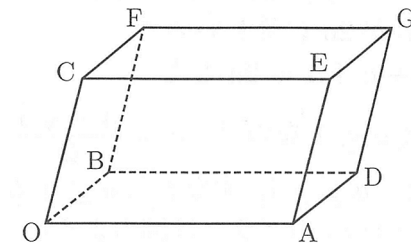
10 関数  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  ( $x > 0$ ) を考える.  $xy$  平面において, 曲線  $y = f(x)$  を  $C$  とするとき, 次の問いに答えなさい.

(1) 関数  $f(x)$  の極値と, 曲線  $C$  の変曲点を求めなさい.

(2)  $a > 1$  のとき, 曲線  $C$ , 直線  $x = a$  および  $x$  軸で囲まれた図形の面積を  $a$  を用いて表しなさい.

(山口大学 2017)

11  $0 < t < 1$  とする. 平行六面体  $OADB-CEGF$  において, 辺  $DG$  を  $2:3$  に内分する点を  $P$ , 辺  $OC$  を  $t:(1-t)$  に内分する点を  $Q$ , 直線  $OP$  と平面  $ABQ$  との交点を  $R$  とする.  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  とするとき, 次の問いに答えなさい.



(1)  $\vec{OR}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $t$  を用いて表しなさい.

(2) 点  $R$  が三角形  $ABQ$  の重心と一致するとき,  $t$  の値を求めなさい.

(3) 直線  $AR$  と直線  $BQ$  との交点が線分  $BQ$  を  $3:2$  に内分するとき,  $t$  の値を求めなさい.

(山口大学 2017)

12  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \beta = \frac{7}{8}$  を満たす実数  $\alpha$ ,  $\beta$  について, 次の問いに答えなさい. ただし,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  とする.

(1)  $\sin 2\alpha$  と  $\cos 2\beta$  の値を求めなさい.

(2)  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$  が成り立つことを示しなさい.

(3)  $\frac{\pi}{12} < \beta < \frac{\pi}{6}$  が成り立つことを示しなさい.

(山口大学 2017)