______ 年　番号 ______　氏名 ______________________________

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 3a_n + 2n$ で表されるとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 と a_2 を求めよ．

(2) a_n を n の式で表せ．

（東北学院大学　2016）

$\boxed{2}$ 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次のように定める．

$$a_1 = 1,\quad b_1 = 2,$$
$$a_{n+1} = 2a_n + b_n,\quad 2b_{n+1} = a_n + 3b_n\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問に答えよ．

(1) $c_n = a_n + b_n$ とおくとき，c_{n+1} と c_n の関係式を求めよ．

(2) c_n を n を用いて表せ．

(3) a_n，b_n をそれぞれ n を用いて表せ．

（香川大学　2016）

$\boxed{3}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 2,\quad a_{n+1} = 8{a_n}^2\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく．b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $P_n = a_1a_2a_3\cdots a_n$ とおく．数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

（大阪大学　2017）

$\boxed{4}$ $a_1 = 3,\ \sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_n + 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) n を 2 以上の自然数とするとき，a_{n+1} を a_n，a_{n-1} で表しなさい．

(2) $a_{n+1} - 2a_n$ を n の式で表しなさい．

(3) a_n を n の式で表しなさい．

（大分大学　2017）

2016年 文系 第6問

$\boxed{6}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 3a_n + 2n$ で表されるとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 と a_2 を求めよ．

(2) a_n を n の式で表せ．

(1) $a_1 = S_1 = 3a_1 + 2\cdot 1$ 　よって，$\underline{a_1 = -1}$ //

$S_2 = a_1 + a_2$ より，　$3\cdot a_2 + 4 = -1 + a_2$ 　$\therefore \underline{a_2 = -\frac{5}{2}}$ //

(2) $n \geqq 2$ のとき．

$S_{n-1} = 3a_{n-1} + 2(n-1) \cdots ①$

$S_n = 3a_n + 2n \cdots ②$

②－① より，$S_n - S_{n-1} = 3a_n - 3a_{n-1} + 2$

$\therefore a_n = 3a_n - 3a_{n-1} + 2$

$a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} - 1$

$\therefore a_n - 2 = \frac{3}{2}(a_{n-1} - 2)$

$\therefore$ 数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = -3$，公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列

よって，$a_n - 2 = -3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore \underline{a_n = 2 - 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$ // $\rightarrow$ $a_n = 2\left\{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$ でもよい

香川大学

2016年 教育学部・農学部 第1問

$\boxed{1}$ 2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次のように定める．

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2,$$
$$a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad 2b_{n+1} = a_n + 3b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問に答えよ．

(1) $c_n = a_n + b_n$ とおくとき，c_{n+1} と c_n の関係式を求めよ．
(2) c_n を n を用いて表せ．
(3) a_n，b_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(1) $a_{n+1} = 2a_n + b_n \cdots ①$ ，$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \cdots ②$

①＋②より，$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{5}{2}a_n + \frac{5}{2}b_n$

$\therefore \underline{c_{n+1} = \frac{5}{2}c_n}$ //

(2) $c_1 = a_1 + b_1 = 3$

$\therefore$ (1)より，数列 $\{c_n\}$ は初項3，公比 $\frac{5}{2}$ の等比数列

$\therefore \underline{c_n = 3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}}$ //

(3) (2)より，$b_n = 3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - a_n \cdots ③$

これを①に代入して，

$$a_{n+1} = a_n + 3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

$\therefore n \geqq 2$ に対して，
$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{k-1}$$
$$= 1 + 3\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{5}{2}\right)}$$
$$= -1 + 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$\therefore \underline{a_n = 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - 1}$ // ③に代入して，$\underline{b_n = 1 + \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}}$ //

大阪大学

2017年 文系 第3問

$\boxed{3}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 8{a_n}^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく．b_{n+1} を b_n を用いてあらわせ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおく．数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ．

(1) 帰納的に $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であることが分かるので

漸化式の両辺，底が2の対数をとり，

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8{a_n}^2$$
$$= 2\log_2 a_n + 3$$

$\therefore$ $\underline{b_{n+1} = 2b_n + 3}$ //

(2) $b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$

また，$b_1 = \log_2 a_1 = 1$ より，$b_1 + 3 = 4$

数列 $\{b_n + 3\}$ は初項4，公比2の等比数列より，$b_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore$ $\underline{b_n = 2^{n+1} - 3}$ //

(3) $P_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であるから対数をとると，

$$\log_2 P_n = \log_2 a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$
$$= \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_n$$
$$= b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (2^{k+1} - 3)$$
$$= \frac{4(1 - 2^n)}{1 - 2} - 3n$$
$$= 2^{n+2} - 3n - 4$$

$\therefore$ $\underline{P_n = 2^{2^{n+2} - 3n - 4}}$ //

(4) $P_n > 10^{100} \iff \log_2 P_n > 100 \log_2 10$

$\iff 2^{n+2} - 3n - 4 > 100\log_2 10 \quad \cdots (*)$

ここで，$3 < \log_2 10 < 4$ より，

$300 < 100\log_2 10 < 400$

一方 $(*)$ の左辺は，

$n = 1$ のとき，1

$n = 2$ のとき，6

$n = 3$ のとき，19

$n = 4$ のとき，48

$n = 5$ のとき，109

$n = 6$ のとき，234

$n = 7$ のとき，487

$\therefore$ $\underline{n = 7}$ //

2017年 経済学部 第4問

増田

4 $a_1=3,\ \sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

(1) n を2以上の自然数とするとき，a_{n+1} を $a_n,\ a_{n-1}$ で表しなさい.

(2) $a_{n+1}-2a_n$ を n の式で表しなさい.

(3) a_n を n の式で表しなさい.

(1)

$4a_n+1=\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}$

$-)\ 4a_{n-1}+1=\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n$ （ただし $n\geqq 2$）

$4a_n-4a_{n-1}=a_{n+1}$

$\underline{a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}}$ …①

(2) ①の数列の特性方程式は

$x^2=4x-4$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

よって

$a_{n+1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})$

$b_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくと，b_n は初項4，公比2の等比数列

$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1+a_2=4a_1+1$

$a_2=3a_1+1$

$=3\times3+1=10$

$b_1=a_2-2a_1$

$=10-2\times3=4$

$b_n=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$

$\underline{a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

(3) $a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}$

両辺を 2^{n+1} で割る

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+1$

$c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，

$c_{n+1}=c_n+1$

c_n は初項 $\frac{3}{2}$，公差1の等差数列

$c_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$c_n=\dfrac{3}{2}+(n-1)\cdot1$

$=n+\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{a_n}{2^n}=n+\dfrac{1}{2}$

$\therefore a_n=n\cdot2^n+2^{n-1}$

これは，$a_1=1\cdot2+2^0=3$ となるので，$n=1$ でも成り立つ

$\underline{a_n=2^{n-1}(2n+1)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$