

1 座標平面上に、原点を中心とする半径 1 の円と、その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ (ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また、その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。

(千葉大学 2014)



2014年 理学部 (数学・情報数理) 第2問

2 座標平面上に、原点を中心とする半径1の円と、その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ (ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) における接線と正方形の隣接する2辺がなす三角形の3辺の長さの和は一定であることを示せ。また、その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。

円周上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ における接線は

$$l: \cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y = 1 \text{ と表せる}$$

$$\text{これと } x=1 \text{ との交点は } \left(1, \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$y=1 \text{ との交点は } \left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}, 1\right)$$

\therefore 3辺の長さの和を L とおくと、

$$L = \left(1 - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) + \left(1 - \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} - 1\right)^2}$$

$$= 2 - \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta \cos\theta} + \sqrt{(\sin\theta + \cos\theta - 1)^2 \left(\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\right)}$$

$$\text{ここで、} \sin\theta + \cos\theta - 1 = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \text{ と } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$\sin\theta + \cos\theta - 1 > 0, \sin\theta > 0, \cos\theta > 0 \text{ なるので}$$

$$\therefore L = 2 - \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta \cos\theta} + \frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta \cos\theta}$$

$$= 2 \text{ (一定)}$$

また、三角形の面積を S とおくと、

$$S = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) \left(1 - \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{(\sin\theta + \cos\theta - 1)^2}{2 \sin\theta \cos\theta}$$

$$\text{ここで、} t = \sin\theta + \cos\theta \text{ とおくと、} \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ より}$$

$$1 < t \leq \sqrt{2} \text{ であり、} S = \frac{(t-1)^2}{t^2-1} = \frac{t-1}{t+1} = 1 - \frac{2}{t+1}$$

$$\therefore S \text{ の最大値は } 1 - \frac{2}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2} \text{ である}$$

$$\text{これは } t = \sqrt{2} \text{ すなわち } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき}$$

