

1 自然数 n に対し

$$S_n = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx$$
$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく. このとき以下の各問いに答えよ.

(1) 次の不等式を示せ.

$$\left| S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

(2) $T_n - 2S_n$ を n を用いて表せ.

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ を求めよ.

(東京医科歯科大学 2011)

2 座標平面において, 原点を O とし, 次のような 3 点 P, Q, R を考える.

(a) 点 P は x 軸上にあり, その x 座標は正である.

(b) 点 Q は第 1 象限にあつて, $OQ = QP = 1$ を満たす.

(c) 点 R は第 1 象限にあつて, $OR + RP = 2$ を満たし, かつ線分 RP が x 軸に垂直となる.

ただし, 座標軸は第 1 象限に含めないものとする. このとき以下の各問いに答えよ.

(1) 上の条件を満たす 2 点 Q, R が存在するような, 点 P の x 座標が取りうる値の範囲を求めよ.

(2) (1) の範囲を点 P が動くとき, 線分 QR が通過する領域を図示し, その面積を求めよ.

(3) 線分 OP の中点を M とする. (1) の範囲を点 P が動くとき, 四角形 $MPRQ$ の面積を最大にする点 P の x 座標を求めよ.

(東京医科歯科大学 2011)