＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 $\triangle$OABの辺OAを$1:2$に内分する点をC，辺OBを$3:2$に内分する点をDとする．$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$をみたす点をEとし，直線OEと直線BCとの交点をFとする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ．

(3) FC：CBを求めよ．

（香川大学　2012）

2 平行四辺形ABCDは，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AD}=3$，$\cos\angle\mathrm{BAD}=\dfrac{1}{3}$を満たしているとする．直線BC上に$\mathrm{BC}\perp\mathrm{AP}$となる点Pをとり，直線BD上に$\mathrm{BD}\perp\mathrm{AQ}$となる点Qをとる．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$とおくとき，次の問に答えよ．

(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ．

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$と$\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|$を求めよ．

(4) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$を求めよ．

（香川大学　2016）

3 平面上の三角形ABCは，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=3$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$を満たしているとする．また，平面上の動点Pに対し実数$f(\mathrm{P})$を

$$f(\mathrm{P})=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

で定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 三角形ABCの重心をGとするとき，$f(\mathrm{G})$の値を求めよ．

(2) $f(\mathrm{P})=\dfrac{8}{3}$となる点Pの全体は円になることを示せ．

(3) 点Pが平面全体を動くとき，$f(\mathrm{P})$のとりうる値の範囲を求めよ．

（香川大学　2016）

4 四面体OABCにおいて，辺OAを$4:1$に内分する点をD，辺BCを$2:3$に内分する点をE，線分DEを$3:2$に内分する点をFとし，直線OFが平面ABCと交わる点をGとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(3) OF：FGを求めよ．

（香川大学　2018）

5 四面体OABCにおいて，Pを辺OAの中点，Qを辺OBを$2:1$に内分する点，Rを辺BCの中点とする．P，Q，Rを通る平面と辺ACの交点をSとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2) 比$\left|\overrightarrow{\mathrm{AS}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{SC}}\right|$を求めよ．

(3) 四面体OABCを1辺の長さが1の正四面体とするとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{QS}}\right|$を求めよ．

（神戸大学　2016）

6 tを正の定数とする．原点をOとする空間内に，2点A$(2t,\ 2t,\ 0)$，B$(0,\ 0,\ t)$がある．また動点Pは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$$

を満たすように動く．OPの最大値が3となるようなtの値を求めよ．

（一橋大学　2013）

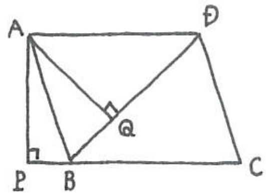
香川大学

2016年 教育学部・農学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 平行四辺形 ABCD は，AB $= 2$，AD $= 3$，$\cos\angle\mathrm{BAD} = \dfrac{1}{3}$ を満たしているとする．直線 BC 上に BC $\perp$ AP となる点 P をとり，直線 BD 上に BD $\perp$ AQ となる点 Q をとる．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．
(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$ と $\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|$ を求めよ．
(4) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$ を求めよ．



(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{BAD}$

$= 2\cdot 3\cdot\frac{1}{3}$

$= \underline{2}$ //

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{a} + s\vec{b}$（$s$は実数）と表せる．

∴ BC⊥AP より，$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{a}\cdot\vec{b} + s|\vec{b}|^2 = 0$ ∴ $2 + 9s = 0$ ∴ $s = -\frac{2}{9}$

∴ $\underline{\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}}$ //

BQ : QD $= t : 1-t$（tは実数）とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$

BD⊥AQ より，$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} = (1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 - (1-t)|\vec{a}|^2 - t\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

∴ $9t - 2 = 0$ ∴ $t = \frac{2}{9}$ ∴ $\underline{\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}}$ //

(3) (2)より，

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = |\vec{a}|^2 - \frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{4}{81}|\vec{b}|^2 = 4 - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \frac{32}{9}$ ∴ $\underline{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \frac{4\sqrt{2}}{3}}$ //

$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2 = \frac{49}{81}|\vec{a}|^2 + \frac{28}{81}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{4}{81}|\vec{b}|^2 = \frac{196}{81} + \frac{56}{81} + \frac{36}{81} = \frac{288}{81}$ ∴ $\underline{|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| = \frac{4\sqrt{2}}{3}}$ //

(4) (2)より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{7}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} - \left(\vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}\right) = -\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}$

∴ $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = \frac{4}{81}|\vec{a}|^2 - \frac{16}{81}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{16}{81}|\vec{b}|^2$

$= \frac{16}{81} - \frac{32}{81} + \frac{144}{81}$

$= \frac{128}{81}$

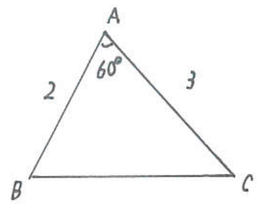
∴ $\underline{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \frac{8\sqrt{2}}{9}}$ //

香川大学

2016年 医学部 第3問

3 平面上の三角形ABCは，$AB=2$，$AC=3$，$\angle BAC=60^\circ$ を満たしているとする．また，平面上の動点Pに対し実数 $f(\mathrm{P})$ を

$$f(\mathrm{P})=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$



で定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 三角形ABCの重心をGとするとき，$f(\mathrm{G})$ の値を求めよ．
(2) $f(\mathrm{P})=\dfrac{8}{3}$ となる点Pの全体は円になることを示せ．
(3) 点Pが平面全体を動くとき，$f(\mathrm{P})$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})$

また，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ=3$ であるから

$f(G)=\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{AG}$

$=\frac{1}{9}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{9}(-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})+\frac{1}{9}(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=\frac{1}{9}(-3|\overrightarrow{AB}|^2+3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-3|\overrightarrow{AC}|^2)$

$=\frac{1}{9}(-12+9-27)$

$=-\frac{10}{3}$

(2) $f(P)=(\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GA})\cdot(\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GB})\cdot(\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GC})\cdot(\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GA})$

$=3|\overrightarrow{GP}|^2-2\overrightarrow{GP}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}$

$=3|\overrightarrow{GP}|^2+2\overrightarrow{GP}\cdot(\underbrace{\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}}_{\text{Gは重心より }0})+\underbrace{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{AG}}_{\text{(1)より，}-\frac{10}{3}}$

$=3|\overrightarrow{GP}|^2-\frac{10}{3}$

$\therefore f(P)=\frac{8}{3}$ より，$3|\overrightarrow{GP}|^2-\frac{10}{3}=\frac{8}{3}$ $\therefore |\overrightarrow{GP}|=\sqrt{2}$ ∴ 点Pは重心Gを中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円上の点 ▨

(3) $f(P)=3|\overrightarrow{GP}|^2-\frac{10}{3}\geqq-\frac{10}{3}$ $\therefore f(P)\geqq-\frac{10}{3}$（等号はPが重心のとき成立）//

神戸大学

2016年 文系 第1問

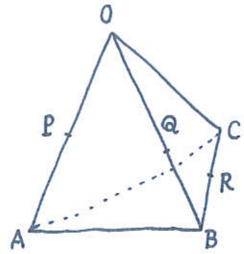
数理 石井K

$\boxed{1}$ 四面体OABCにおいて，Pを辺OAの中点，Qを辺OBを2：1に内分する点，Rを辺BCの中点とする．P，Q，Rを通る平面と辺ACの交点をSとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 比 $|\overrightarrow{AS}|:|\overrightarrow{SC}|$ を求めよ．

(3) 四面体OABCを1辺の長さが1の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{QS}|$ を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

∴ $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ より，$\underline{\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}}$ //

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$ より，$\underline{\overrightarrow{PR}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$ //

(2) $|\overrightarrow{AS}|:|\overrightarrow{SC}|=s:1-s$ とおくと，$\overrightarrow{OS}=(1-s)\vec{a}+s\vec{c}$

∴ $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{a}+s\vec{c}$

ここで，点Sは平面PQR上にあるので，

$\overrightarrow{PS}=k\overrightarrow{PQ}+l\overrightarrow{PR}$ と表せるので(1)より，

∴ $\left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{a}+s\vec{c}=-\frac{1}{2}(k+l)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}k+\frac{1}{2}l\right)\vec{b}+\frac{1}{2}l\vec{c}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は互いに一次独立より，

$$\begin{cases}\frac{1}{2}-s=-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}l\\ \frac{2}{3}k+\frac{1}{2}l=0\\ s=\frac{1}{2}l\end{cases}\iff k=-1,\ l=\frac{4}{3},\ s=\frac{2}{3}$$

∴ $|\overrightarrow{AS}|:|\overrightarrow{SC}|=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=\underline{2:1}$ //

(3) (2)より，$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}$

∴ $\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

四面体OABCが1辺の長さが1の正四面体のとき，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$ より，

$$|\overrightarrow{QS}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+\frac{4}{9}|\vec{c}|^2-\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{8}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{4}{9}\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}-\frac{2}{9}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}$$

$$=\frac{5}{9}$$

∴ $\underline{|\overrightarrow{QS}|=\frac{\sqrt{5}}{3}}$ //