$\boxed{1}$ $a > 0$とする．$x > 0$で定義された関数$y = x^2 + ax - 3a^2 \log x$のグラフが$x$軸と共有点をもつような$a$の範囲を求めよ．

（兵庫県立大学　2016）

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ および 2 次導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $x \geqq 0$ において $f'(x) \geqq 0$ および $f(x) \geqq 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $f(x)$ の定積分を利用して $\sin 1 \geqq \dfrac{5}{6}$ を示せ．

（鹿児島大学　2016）

$\boxed{3}$ $0 < \theta < \pi$ とする．単位円の周上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を θ を用いて表せ．また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

（群馬大学　2016）

兵庫県立大学

2016 年 工学部 第 1 問

数理 石井K

$\boxed{1}$ $a>0$とする．$x>0$で定義された関数$y=x^2+ax-3a^2\log x$のグラフがx軸と共有点をもつようなaの範囲を求めよ．

$$y'=2x+a-\frac{3a^2}{x}$$
$$=\frac{2x^2+ax-3a^2}{x}$$
$$=\frac{(2x+3a)(x-a)}{x}$$

x	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$	(∞)	
y'		$-$		$+$		
y	(∞)	$\searrow$		$\nearrow$		

$y'=0$となるのは，$x>0$，$a>0$より，$x=a$のとき

増減表より，最小値は $2a^2-3a^2\log a$

$\therefore$ x軸と共有点をもつのは，

$2a^2-3a^2\log a \leqq 0$ のとき

$\therefore$ $a^2(2-3\log a)\leqq 0$

$a>0$より，$a^2>0$であるから，$2-3\log a\leqq 0$

$\therefore$ $\log a \geqq \frac{2}{3}$

$\therefore$ $\underline{a\geqq e^{\frac{2}{3}}}$ //

2016年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ および2次導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $x \geqq 0$ において $f'(x) \geqq 0$ および $f(x) \geqq 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $f(x)$ の定積分を利用して $\sin 1 \geqq \dfrac{5}{6}$ を示せ．

(1) $\underline{f'(x)=-\sin x+x}$ //　$\underline{f''(x)=1-\cos x}$ //

(2) $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ より，$f''(x) \geqq 0$

よって，$f'(x)$ は単調増加

$\therefore\ f'(x) \geqq f'(0)=0 \quad (x \geqq 0)$

これより，$x \geqq 0$ において，$f(x)$ は単調増加で

$f(x) \geqq f(0)=0$ ▨

(3) (2)より，$x \geqq 0$ において，$\cos x \geqq 1-\dfrac{x^2}{2}$ であるから

区間 $[0,1]$ において，両辺積分すると，

$$\int_0^1 \cos x\,dx \geqq \int_0^1 1-\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$\therefore\ \Big[\sin x\Big]_0^1 \geqq \Big[x-\frac{x^3}{6}\Big]_0^1$$

$$\therefore\ \sin x \geqq \frac{5}{6}$$ ▨

群馬大学

2016年 理工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $0 < \theta < \pi$ とする．単位円の周上の3点 A(1, 0), B($\cos\theta$, $\sin\theta$), C($\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$) を頂点とする△ABCの面積を θ を用いて表せ．また，△ABCの面積の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

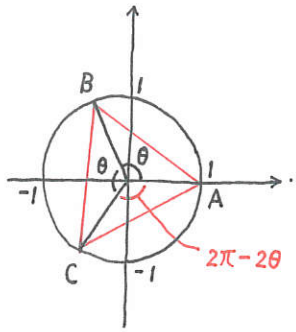
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin(2\pi - 2\theta)$$

$$= \sin\theta + \frac{1}{2}\sin(-2\theta)$$

$$= \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$= \sin\theta - \sin\theta\cos\theta$$

$$= \underline{\sin\theta(1-\cos\theta)}_{//}$$



△ABCの面積を $f(\theta)$ で表すと，

$$f'(\theta) = \cos\theta(1-\cos\theta) + \sin\theta\cdot\sin\theta$$

$$= \cos\theta - \cos^2\theta + 1 - \cos^2\theta$$

$$= -2\cos^2\theta + \cos\theta + 1$$

$$= -(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1)$$

$0 < \theta < \pi$ より，$\cos\theta - 1 < 0$ であり

増減表は右のようになる．

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	(0)

∴ △ABCの面積の最大値は $\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\theta = \frac{2}{3}\pi \text{ のとき}\right)}_{//}$