

1 次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

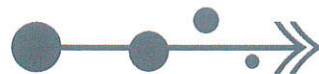
(1) 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ について、極値を調べ、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \text{ を用いてよい。}$$

(2) $e^\pi > \pi^e$ を示せ。

(3) $e^{\sqrt{\pi}} < \pi^{\sqrt{e}}$ を示せ。

(島根大学 2016)



2016年 総合理工 (数理・情報システム以外) 第3問

数理
石井3 次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ について、極値を調べ、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。
- (2) $e^\pi > \pi^e$ を示せ。
- (3) $e^{\sqrt{\pi}} < \pi^{\sqrt{e}}$ を示せ。

$$(1) f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

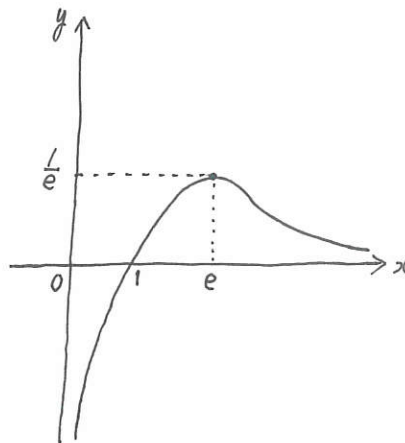
$\therefore f'(x) = 0$ となるのは、 $x = e$ のとき

x	(0)	\dots	e	\dots	(∞)
$f'(x)$	/	+	0	-	/
$f(x)$	$(-\infty)$	\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow	(0)

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

\therefore 最大値 $\frac{1}{e}$ ($x = e$ のとき)

グラフは右のようになる



(2) $e < \pi$ より (1) のグラフにより $f(e) > f(\pi)$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi} &\iff \pi \log e > e \log \pi \\ &\iff \log e^\pi > \log \pi^e \\ &\iff e^\pi > \pi^e \quad \square \end{aligned}$$

(3) $\sqrt{e} < \sqrt{\pi} < e$ より、 $f(\sqrt{e}) < f(\sqrt{\pi})$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\log \sqrt{e}}{\sqrt{e}} < \frac{\log \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} &\iff \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \log e < \frac{1}{2} \sqrt{e} \log \pi \\ &\iff \log e^{\sqrt{\pi}} < \log \pi^{\sqrt{e}} \\ &\iff e^{\sqrt{\pi}} < \pi^{\sqrt{e}} \quad \square \end{aligned}$$