

1 ある学校では毎日, A, B, C, D, E の 5 曲の中から異なる 3 曲を無作為に選んで昼休みに放送している. n を任意の自然数とする. このとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) 1 日に曲 A, B が両方とも放送される確率を求めなさい.
- (2) n 日間で曲 A, B のいずれも全く放送されない確率を求めなさい.
- (3) n 日間で曲 A が少なくとも 1 度は放送される確率を求めなさい.

(山口大学 2008)

2 n を自然数とするとき,

$$2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k(k-1) = (-1)^{n+1} n^2 + \frac{(-1)^n - 1}{2}$$

が成り立つことを示しなさい.

(山口大学 2010)

2010年 第3問

 数理
石井K
3 n を自然数とするとき、

$$2 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k(k-1) = (-1)^{n+1} n^2 + \frac{(-1)^n - 1}{2}$$

が成り立つことを示しなさい。

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= 2 \{ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 6 \cdot 5 + \cdots + (-1)^n \cdot (n-1)(n-2) \\ &\quad + (-1)^{n+1} n(n-1) \} \end{aligned}$$

(i) n が偶数のとき。

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= 2 \{ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + \cdots + (n-1) \cdot (n-2) \} \\ &\quad - 2 \{ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n-1) \} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{正の項と負の項を} \\ \text{分けた} \end{array} \right\}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (2k-1)(2k-2) - 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} 2k \cdot (2k-1) \quad \text{再び}\Sigma\text{で表す。}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-4k+2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{)} \Sigma \text{の公式により} \end{array} \right\}$$

$$= -n^2$$

一方、(右辺)は n : 偶数のとき、(右辺) = $-n^2$ \therefore 成り立つ(ii) n が奇数のとき、 $n=1$ であれば (左辺) = $2 \cdot (-1)^2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, (右辺) = $1-1=0$ となり成り立つので、 $n \geq 3$ とする。

$$\text{このとき、(左辺)} = \underbrace{2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} k(k-1)}_{n-1: \text{偶数より (i) が使える。}} + \underbrace{2(-1)^{n+1} n(n-1)}_{n \text{ のときだけ外に出す。}}$$

$$= (-1)^n (n-1)^2 + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{2} + 2n(n-1)$$

$$= -(n-1)^2 + 2n^2 - 2n$$

$$= n^2 - 1$$

一方、(右辺) = $n^2 - 1$ となり成り立つ(i), (ii) より、 n が自然数のとき、与式は成り立つ \square

赤下線のように
工夫すると速く解ける
が、(i)と同じようにして(ii)
を示しても、もちろん
正解となる。