______ 年　番号 ______　氏名 ______________________________

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい．

(1) 次の極限を求めなさい．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+3)}-\sqrt{n(n+2)}\right)$$

(2) 複素数平面上の 2 点 $\alpha=4-2i$，$\beta=3-3i$ に対して，次の問いに答えなさい．

（ i ）点 α を点 β の周りに 30° 回転した点を表す複素数 γ を求めなさい．

（ii）β^6 の値を求めなさい．

(3) 三角形 ABC があり AB $=5$，AC $=3$，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{3}$ とする．点 A から辺 BC へ下ろした垂線と辺 BC の交点を H とする．

（ i ）ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表しなさい．

（ii）線分 AH の長さを求めなさい．

（福島大学　2016）

$\boxed{2}$ n を自然数とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $a>0$，$n\geqq 3$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明しなさい．

$$(1+a)^n>\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$$

(2) $r>1$ のとき，極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n}$$

を求めなさい．

（山口大学　2016）

2016年 人文B 第3問

$\boxed{3}$ 次の問いに答えなさい．

(1) 次の極限を求めなさい．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+3)}-\sqrt{n(n+2)}\right)$$

(2) 複素数平面上の2点 $\alpha=4-2i$, $\beta=3-3i$ に対して，次の問いに答えなさい．

(i) 点 α を点 β の周りに 30° 回転した点を表す複素数 γ を求めなさい．

(ii) β^6 の値を求めなさい．

(3) 三角形ABCがあり $\mathrm{AB}=5$, $\mathrm{AC}=3$, $\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{3}$ とする．点Aから辺BCへ下ろした垂線と辺BCの交点をHとする．

(i) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表しなさい．

(ii) 線分AHの長さを求めなさい．

(1) $(与式)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+3)-n(n+2)}{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n(n+2)}}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{n(n+2)}}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{3}{n})}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$

$=\underline{1}$ //

(2) (i) $\gamma=(\alpha-\beta)(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)+\beta$

$=(1+i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+3-3i$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i+3-3i$

$=\underline{\frac{\sqrt{3}+5}{2}+\frac{\sqrt{3}-5}{2}i}$ //

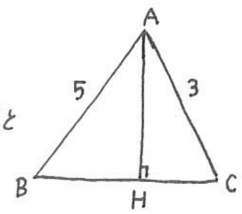
(ii) $\beta=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=3\sqrt{2}\{\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)\}$

$\therefore \beta^6=(3\sqrt{2})^6\{\cos(-270^\circ)+i\sin(-270^\circ)\}$

$=\underline{5832i}$ //

(3) $BH:HC=s:(1-s)$ とおくと



(i) $\overrightarrow{AH}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ となるので

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\{(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}\}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=(1-s)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-(1-s)|\overrightarrow{AB}|^2+s|\overrightarrow{AC}|^2-s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$|\overrightarrow{AB}|=5$, $|\overrightarrow{AC}|=3$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\cdot3\cdot\frac{1}{3}=5$ より

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(1-2s)\cdot5-(1-s)\cdot25+9s$

$=24s-20$

$\therefore 24s-20=0$ $\quad\therefore s=\frac{5}{6}$

$\therefore \underline{\overrightarrow{AH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}}$ //

(ii) $|\overrightarrow{AH}|^2=\frac{1}{36}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{5}{18}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{25}{36}|\overrightarrow{AC}|^2$

$=\frac{25}{36}+\frac{25}{18}+\frac{225}{36}$

$=\frac{300}{36}$

$\therefore \underline{|\overrightarrow{AH}|=\frac{5\sqrt{3}}{3}}$ //

2016年 工・理・教育 第2問

2 nを自然数とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $a>0$，$n\geqq 3$のとき，次の不等式が成り立つことを証明しなさい．

$$(1+a)^n > \underbrace{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3}_{={}_nC_3}$$

(2) $r>1$のとき，極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n}$$

を求めなさい．

(1) 二項定理より，$(1+a)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\cdot a^k$

$$\therefore (1+a)^n=\underbrace{1}_{k=0}+\underbrace{na}_{k=1}+\underbrace{\frac{n(n-1)}{2}\cdot a^2}_{k=2}+\underbrace{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3}_{k=3\text{のとき}}+(\text{その他の正の項})$$

$a>0$，$n\geqq 3$ であるから，$(1+a)^n>\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$ が成り立つ ▨

(2) $a=r-1\ (>0)$ とおくと (1) より

$$r^n>\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(r-1)^3$$

よって，

$$0<\frac{n^2}{r^n}<\frac{6n}{(n-1)(n-2)(r-1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{(n-1)(n-2)(r-1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{n}}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(r-1)^3}=0$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n}=0$$

〃