＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=\log(1+x^2)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx$ を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ の増減を調べ，$y=f'(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) 曲線 $C: y=f(x)$ と曲線 C の互いに直交している 2 本の接線とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

（旭川医科大学　2014）

$\boxed{2}$ 方程式 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2x}=\left(\dfrac{16}{9}\right)^{x-1}$ の解を a とするとき，$6a$ の値を求めよ．

（自治医科大学　2014）

$\boxed{3}$ 空間に，同一直線上にない３点O，A，Bがあり，条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -1$$

を満たしている．O，A，Bを通る平面を α とし，α 上にない点Pを次の条件を満たすようにとる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -1$$

点Pから平面 α に下ろした垂線と α との交点をHとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる．$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = p$ とおくと，△OPHの面積は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}\,p^2 - \boxed{\text{ク}}}$$

と表される．

△OABの面積が△OPHの面積の２倍に等しいとき

$$p^2 = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

である．またこのとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ を満たす点Qをとると，四面体QOAHの体積は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セソ}}}$$

である．

（獨協医科大学　2014）

0001820639718999

旭川医科大学

2014 年 医学部 第 1 問

1 関数 $f(x) = \log(1 + x^2)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\int_0^1 \log(1 + x^2)\,dx$ を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ の増減を調べ，$y = f'(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) 曲線 $C : y = f(x)$ と曲線 C の互いに直交している 2 本の接線とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(1) $\int_0^1 (x)'\log(1+x^2)\,dx = \left[x\log(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$

$= \log 2 - \left[2x\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$= \log 2 - 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$

$= \underline{\log 2 + \frac{\pi}{2} - 2}$ //

(2) $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$

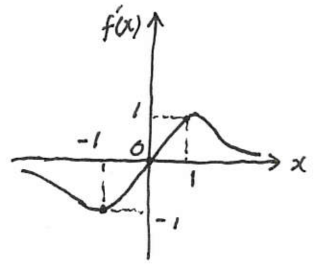
$\therefore f''(x) = 0$ となるのは．$x = \pm 1$

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$，$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0$

$\therefore$ $y = f'(x)$ のグラフは右のようになる

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↘	-1	↗		↘

極小　1 (極大)



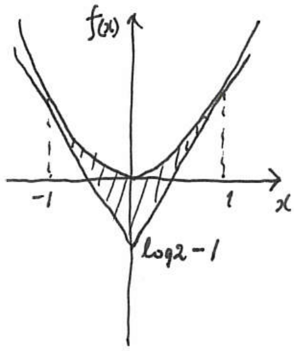
(3) (2)より．$f'(\alpha)\cdot f'(\beta) = -1$ かつ．$\alpha < \beta$ となるのは．

$\alpha = -1$，$\beta = 1$ のときのみである．($\because$ $|f'(x)| \leqq 1$ がすべての x で成り立つ)

このとき．2本の接線は．

$$\begin{cases} y = -x - 1 + \log 2 \\ y = x - 1 + \log 2 \end{cases}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗



$\therefore S = 2\int_0^1 \log(1+x^2) - \{+x - 1 + \log 2\}\,dx$

$= 2\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx + 2\int_0^1 -x + 1 - \log 2\,dx \overset{(1)より}{=} \underline{\pi - 3}$ //

2014年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 方程式 $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2x}=\left(\dfrac{16}{9}\right)^{x-1}$ の解を a とするとき，$6a$ の値を求めよ．

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-2}$$

$$\therefore \left(\frac{3}{4}\right)^{2x}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2-2x}$$

$$\therefore 2x=2-2x$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}$$

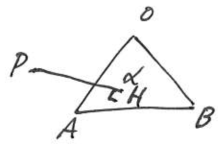
$$\therefore 6a=\frac{1}{2}\cdot 6=\underline{3}$$

0001929540708999

獨協医科大学

2014年 医学部 第3問

数理 石井K



$\boxed{3}$ 空間に，同一直線上にない3点O，A，Bがあり，条件

$$|\overrightarrow{OA}| = 2,\quad |\overrightarrow{OB}| = 1 \quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -1$$

を満たしている．O，A，Bを通る平面を α とし，α 上にない点Pを次の条件を満たすようにとる．

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} = 2,\quad \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB} = -1$$

点Pから平面 α に下ろした垂線と α との交点をHとすると

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\boxed{ア}\ 1}{\boxed{イ}\ 3}\overrightarrow{OA} - \frac{\boxed{ウ}\ 2}{\boxed{エ}\ 3}\overrightarrow{OB}$$

となる．$|\overrightarrow{OP}| = p$ とおくと，△OPHの面積は

$$\frac{\boxed{オ}\ 1}{\boxed{カ}\ 3}\sqrt{\boxed{キ}\ 3\ p^2 - \boxed{ク}\ 4}$$

と表される．

△OABの面積が△OPHの面積の2倍に等しいとき

$$p^2 = \frac{\boxed{ケコ}\ 91}{\boxed{サシ}\ 48}$$

である．またこのとき，$\overrightarrow{PQ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{PO}$ を満たす点Qをとると，四面体QOAHの体積は

$$\frac{\sqrt{\boxed{ス}\ 3}}{\boxed{セソ}\ 18}$$

である．

$\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ とおく $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$，$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$ より．

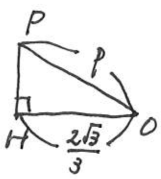
$$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP}) = s|\overrightarrow{OA}|^2 + t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$= 4s - t - 2$$
$$\therefore\ 4s - t = 2 \quad \cdots ①$$
$$\overrightarrow{OB}(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP}) = s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + t|\overrightarrow{OB}|^2 - \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}$$
$$= -s + t + 1$$
$$\therefore\ s - t = 1 \quad \cdots ②$$

①，②より．$s = \frac{1}{3}$，$t = -\frac{2}{3}$

$$\therefore\ \overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} \text{//}$$

$$|\overrightarrow{OH}|^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \quad \therefore\ |\overrightarrow{OH}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore\ \triangle OPH = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{p^2 - \frac{4}{3}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3p^2 - 4}$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{3p^2 - 4} \text{//}$$



$\angle AOB = \theta$ とおくと．$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} = -\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ \theta = 120^\circ$$
$$\therefore\ \triangle OAB = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\sqrt{3p^2 - 4} \qquad \therefore\ p^2 = \frac{91}{48} \text{//}$$

$$\triangle OAH = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OH}|^2 - (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot\frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$QOAH = \frac{2}{3}\ POAH$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{p^2 - \frac{4}{3}}$$
$$= \frac{2}{9\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{91}{48} - \frac{4}{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{18} \text{//}$$