＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $f(x)=\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}$（ただし，$x>0$）に対し，座標平面上の曲線 $C:y=f(x)$ を考える．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 C，2直線 $x=t$，$x=t+1$（ただし，$t>0$）および x 軸で囲まれる図形を，x 軸の周りに1回転して得られる立体の体積 V を t を用いて表せ．

(3) V の最大値を求めよ．

（東京海洋大学　2016）

$\boxed{2}$ a を正の定数とし，2曲線 $C_1:y=\log x$，$C_2:y=ax^2$ が点Pで接しているとする．以下の問に答えよ．

(1) Pの座標と a の値を求めよ．

(2) 2曲線 C_1，C_2 と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

（神戸大学　2016）

$\boxed{3}$ 2つの曲線 $y=x+2\cos x$ $\left(\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}\pi\right)$ と $y=x-2\cos x$ $\left(\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}\pi\right)$ をつないでできる曲線を C とする．

(1) 曲線 C の概形を図示しなさい．

(2) k を実数とする．曲線 C と直線 $y=k$ が異なる2点で交わるための k の値の範囲を求めなさい．

(3) 曲線 C で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めなさい．

（大分大学　2016）

東京海洋大学

2016年 海洋工 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ $f(x)=\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}$（ただし，$x>0$）に対し，座標平面上の曲線$C:y=f(x)$を考える．

(1) $f(x)$の極値を求めよ．

(2) 曲線C，2直線$x=t$，$x=t+1$（ただし，$t>0$）およびx軸で囲まれる図形を，x軸の周りに1回転して得られる立体の体積Vをtを用いて表せ．

(3) Vの最大値を求めよ．

(1) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{x}\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$

$=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{x}{2}}$

x	(0)	…	1	…
$f'(x)$		+		−
$f(x)$		↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

∴ $f'(x)=0$ となるのは，$x=1$ のとき

右の増減表より，極大値 $\frac{1}{\sqrt{e}}$（$x=1$ のとき）をとる //

(2) $x>0$ において，$f(x)>0$ であるから

$V=\pi\int_t^{t+1}\left(\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}\right)^2dx$

$=\pi\int_t^{t+1}x\cdot(-e^{-x})'dx$

$=\pi\left[-xe^{-x}\right]_t^{t+1}-\pi\int_t^{t+1}-e^{-x}dx$

$=\pi\left\{-(t+1)e^{-(t+1)}+te^{-t}\right\}-\pi\left[e^{-x}\right]_t^{t+1}$

$=\pi\left\{-(t+1)e^{-t-1}+te^{-t}-e^{-t-1}+e^{-t}\right\}$

$=\pi\left\{(e-1)t+e-2\right\}e^{-t-1}$ //

(3) $V'=\pi(e-1)e^{-t-1}+\pi\left\{(e-1)t+e-2\right\}\cdot(-e^{-t-1})$

$=\pi\left\{1-(e-1)t\right\}e^{-t-1}$

t	(0)	…	$\frac{1}{e-1}$	…
V'		+	0	−
V		↗		↘

∴ $V'=0$ となるのは，$t=\frac{1}{e-1}$ のとき

$t=\frac{1}{e-1}$ のとき，$V=\pi(e-1)e^{-\frac{e}{e-1}}$

∴ 右の増減表より，Vの最大値は，

$\pi(e-1)e^{-\frac{e}{e-1}}$（$t=\frac{1}{e-1}$ のとき） //

2016年 理系 第3問

$\boxed{3}$ a を正の定数とし，2曲線 $C_1 : y = \log x$，$C_2 : y = ax^2$ が点Pで接しているとする．以下の問に答えよ．

(1) Pの座標と a の値を求めよ．

(2) 2曲線 C_1，C_2 と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

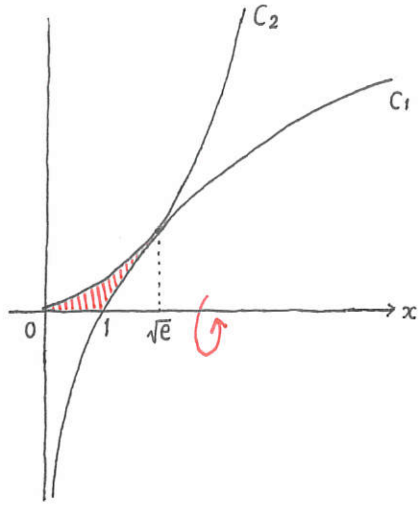
(1) $f(x) = \log x$，$g(x) = ax^2$，点Pの x 座標を t とおくと（$t>0$ とする）

$f'(x) = \frac{1}{x}$，$g'(x) = 2ax$ となり，2曲線が点Pで接することより，

$$f(t) = g(t) \text{ かつ } f'(t) = g'(t) \iff \begin{cases} \log t = at^2 \cdots ① \\ \frac{1}{t} = 2at \cdots ② \end{cases}$$

②より，$a = \frac{1}{2t^2}$ これを①に代入して，$\log t = \frac{1}{2}$ $\therefore t = \sqrt{e}$

$\therefore \underline{P\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right),\ a = \frac{1}{2e}}$ //



(2) 求める体積をVとおくと，

$$V = \pi\int_0^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2e}x^2\right)^2 dx - \pi\int_1^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{4e^2}x^4 dx - \pi\int_1^{\sqrt{e}} (x)'(\log x)^2 dx$$

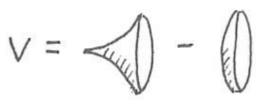
$$= \pi\left[\frac{1}{4e^2}\cdot\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{e}} - \pi\left[x(\log x)^2\right]_1^{\sqrt{e}} + \pi\int_1^{\sqrt{e}} 2\log x\, dx$$

$$= \pi\left(\frac{1}{4e^2}\cdot\frac{e^2\sqrt{e}}{5}\right) - \pi\left(\sqrt{e}\cdot\frac{1}{4}\right) + \pi\cdot 2\int_1^{\sqrt{e}} (x)'\log x\, dx$$

$$= \frac{1}{20}\pi\sqrt{e} - \frac{1}{4}\pi\sqrt{e} + 2\pi\left[x\log x\right]_1^{\sqrt{e}} - 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} dx$$

$$= \frac{1}{20}\pi\sqrt{e} - \frac{1}{4}\pi\sqrt{e} + \pi\sqrt{e} - 2\pi(\sqrt{e} - 1)$$

$$= \underline{2\pi\left(1 - \frac{3}{5}\sqrt{e}\right)}$$ //



大分大学

2016年 工学部 第4問

$\boxed{4}$ 2つの曲線 $y = x + 2\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$ と $y = x - 2\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$ をつないでできる曲線を C とする.

(1) 曲線 C の概形を図示しなさい.

(2) k を実数とする. 曲線 C と直線 $y = k$ が異なる2点で交わるための k の値の範囲を求めなさい.

(3) 曲線 C で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めなさい.

(1) $f(x) = x + 2\cos x$, $g(x) = x - 2\cos x$ とおくと,

$f'(x) = 1 - 2\sin x$, $g'(x) = 1 + 2\sin x$

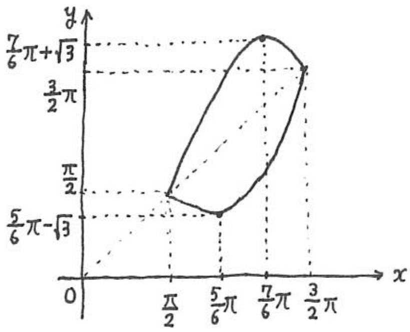
$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ において, $f'(x) = 0$ となるのは, $x = \dfrac{5}{6}\pi$,

$g'(x) = 0$ となるのは, $x = \dfrac{7}{6}\pi$

∴ 増減表は右のようになるので, グラフは下のようになる.

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\pi$

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{7}{6}\pi+\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}\pi$



(2) (1)の図より, $\underline{\dfrac{5}{6}\pi - \sqrt{3} < k < \dfrac{7}{6}\pi + \sqrt{3}}$ //

(3) $V = \pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x - 2\cos x)^2\,dx - \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x + 2\cos x)^2\,dx$

$= -8\pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} x(\sin x)'\,dx$

$= -8\pi\left\{\Big[x\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} - \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sin x\,dx\right\}$

$= -8\pi\left\{-\dfrac{3}{2}\pi - \dfrac{\pi}{2} - \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\right\}$

$= -8\pi(-2\pi)$

$= \underline{16\pi^2}$ //