$\boxed{1}$ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．放物線 $y = x^2$ 上に 3 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\quad \mathrm{A}(\tan\theta,\ \tan^2\theta),\quad \mathrm{B}(-\tan\theta,\ \tan^2\theta)$$

をとる．三角形 OAB の内心の y 座標を p とし，外心の y 座標を q とする．また，正の実数 a に対して，直線 $y = a$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す．

(1) p，q を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるような $\cos\theta$ の値をすべて求めよ．

（筑波大学　2018）

$\boxed{2}$ 放物線 $C : y = x^2 + ax + b$ が 2 直線 $\ell_1 : y = px$ $(p > 0)$，$\ell_2 : y = qx$ $(q < 0)$ と接している．また，C と ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた図形の面積を S とする．

(1) a，b を p，q を用いてそれぞれ表せ．

(2) S を p，q を用いて表せ．

(3) ℓ_1，ℓ_2 が直交するように p，q が動くとき，S の最小値を求めよ．

（筑波大学　2018）

$\boxed{3}$ 正三角形 OAB に対し，直線 OA 上の点 P_1，P_2，P_3，$\cdots$ および直線 OB 上の点 Q_1，Q_2，Q_3，$\cdots$ を，次の (ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ) を満たすようにとる．

(ⅰ) $\mathrm{P}_1 = \mathrm{A}$ である．

(ⅱ) 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$，$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$，$\cdots$ はすべて直線 OA に垂直である．

(ⅲ) 線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$，$\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_3$，$\mathrm{Q}_3\mathrm{P}_4$，$\cdots$ はすべて直線 OB に垂直である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく．点 O を基準とする位置ベクトルが，整数 k，l によって $k\vec{a} + l\vec{b}$ と表される点全体の集合を S とする．n を自然数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = x\vec{a} + y\vec{b}$ で定まる点 R が線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 上にあるとき，x を y を用いて表せ．また，線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 上にある S の点の個数を求めよ．

(3) 三角形 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$ の周または内部にある S の点の個数を求めよ．

（筑波大学　2018）

4 2つの曲線

$$C_1 : y = \frac{1}{\sqrt{2}\sin x} \qquad (0 < x < \pi),$$
$$C_2 : y = \sqrt{2}(\sin x - \cos x) \quad (0 < x < \pi)$$

について以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点の x 座標を求めよ．

(2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 とで囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積 V が π^2 であることを示せ．

（筑波大学　2018）

5 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}\,dt$ とし，$c \geqq \pi$ とする．数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = c$，$a_{n+1} = f(a_n)$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ で定める．

(1) $f(\pi)$ を求めよ．また，$x \geqq \pi$ のとき，$0 < f'(x) \leqq \dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，$a_n \geqq \pi$ が成り立つことを示せ．

(3) すべての自然数 n に対して，$|a_{n+1} - \pi| \leqq \dfrac{2}{\pi}|a_n - \pi|$ が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

（筑波大学　2018）

6 複素数 α に対して，複素数平面上の3点 O(0)，A(α)，B(α^2) を考える．次の条件（ i ），（ ii ），（ iii ）をすべて満たす複素数 α 全体の集合を S とする．

（ i ）α は実数でも純虚数でもない．

（ ii ）$|\alpha| > 1$ である．

（ iii ）三角形 OAB は直角三角形である．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) α が S に属するとき，$\angle\mathrm{OAB} = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(2) 集合 S を複素数平面に図示せよ．

(3) x，y を $\alpha^2 = x + yi$ を満たす実数とする．α が S を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求め，図示せよ．

（筑波大学　2018）