＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ a，b を正の実数とする．座標空間における 4 点 O(0，0，0)，A(a，0，0)，B(0，b，0)，C(0，0，1) を頂点とする四面体 OABC を考える．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の内積を求めよ．

(2) $\cos\angle\mathrm{ACB}$ と $\sin\angle\mathrm{ACB}$ を a，b を用いて表せ．

(3) 三角形 ABC の面積を a，b を用いて表せ．

(4) 四面体 OABC の体積が 1 であるとき，三角形 ABC の面積の最小値とそのときの a と b の値を求めよ．

（琉球大学　2017）

0002411548857999

琉球大学

2017年 文系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ a, bを正の実数とする．座標空間における4点O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, 1)を頂点とする四面体OABCを考える．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$の内積を求めよ．

(2) $\cos\angle\mathrm{ACB}$と$\sin\angle\mathrm{ACB}$をa, bを用いて表せ．

(3) 三角形ABCの面積をa, bを用いて表せ．

(4) 四面体OABCの体積が1であるとき，三角形ABCの面積の最小値とそのときのaとbの値を求めよ．

(1) $\overrightarrow{CA}=(a,0,-1)$, $\overrightarrow{CB}=(0,b,-1)$ より.

$$\underline{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1}\ //$$

(2)
$$\cos\angle ACB=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{b^2+1}}=\underline{\frac{1}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}}\ //$$

$$\sin^2\angle ACB=1-\cos^2\angle ACB=1-\frac{1}{(a^2+1)(b^2+1)}=\frac{a^2b^2+a^2+b^2}{(a^2+1)(b^2+1)}$$

$$\therefore\ \underline{\sin\angle ACB=\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2+b^2}{(a^2+1)(b^2+1)}}}\ //$$

(3)
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\sin\angle ACB=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2}}\ //$$

(4) 四面体OABCの体積をVとすると. $V=\frac{1}{3}\times\triangle OAB\times 1$

$\therefore\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot 1=1$　　$\therefore\ ab=6$

$\therefore$ (3)より.
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{36+a^2+\frac{36}{a^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a-\frac{6}{a}\right)^2+48}\geqq\frac{1}{2}\cdot\sqrt{48}$$
(等号成立は $a=\frac{6}{a}$ すなわち $a=\sqrt{6}$ のとき)

$\therefore$ <u>最小値 $2\sqrt{3}$ ($a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{6}$ のとき)</u> //