＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 関数

$$f(x)=\frac{x}{\sin x}+\cos x \quad (0<x<\pi)$$

の増減表をつくり，$x\to+0$，$x\to\pi-0$ のときの極限を調べよ．

（東京大学　2018）

$\boxed{2}$ 数列 a_1，a_2，$\cdots$ を

$$a_n=\frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定める．

(1) $n\geqq 2$ とする．$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n\geqq 1$ と分子 q_n を求めよ．

(2) a_n が整数となる $n\geqq 1$ をすべて求めよ．

（東京大学　2018）

$\boxed{3}$ 放物線 $y=x^2$ のうち $-1\leqq x\leqq 1$ をみたす部分を C とする．座標平面上の原点 O と点 A$(1,\ 0)$ を考える．$k>0$ を実数とする．点 P が C 上を動き，点 Q が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

をみたす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする．

$S(k)$ および $\displaystyle\lim_{k\to+0}S(k)$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ．

（東京大学　2018）

$\boxed{4}$ $a>0$ とし，

$$f(x)=x^3-3a^2x$$

とおく．次の 2 条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

条件 1：方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ．

条件 2：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である．

（東京大学　2018）

$\boxed{5}$ 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする．点 P(z) は C 上にあり，点 A(1) とは異なるとする．点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を Q(u) とする．$w=\dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す．

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ．

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする．点 P(z) が C' 上を動くときの点 R(w) の軌跡を求めよ．

（東京大学　2018）

$\boxed{6}$ 座標空間内の 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(1,\ 1,\ 1)$ を考える．$\dfrac{1}{2}<r<1$ とする．点 P が線分 OA，AB，BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球（内部を含む）が通過する部分を，それぞれ V_1，V_2，V_3 とする．

(1) 平面 $y=t$ が V_1，V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ．さらに，この範囲の t に対し，平面 $y=t$ と V_1 の共通部分および，平面 $y=t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ．

(2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ．

(3) r は (2) の条件をみたすとする．V_1 の体積を S とし，V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする．V_1，V_2，V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ．

(4) ひきつづき r は (2) の条件をみたすとする．S と T を求め，V の体積を決定せよ．

（東京大学　2018）