＿＿＿年　番号＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 四面体 OABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1$，$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{BOC} = \dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{COA} = \dfrac{\pi}{3}$ であるとする．次の問に答えよ．

(1) 頂点 C から三角形 OAB を含む平面に下ろした垂線を CD とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ．

（早稲田大学　2017）

0002366453367999

早稲田大学

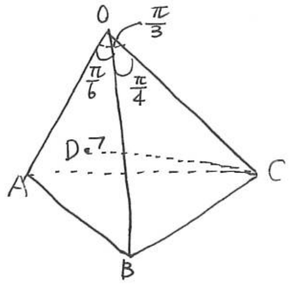
2017年 教育 第3問

増田

$\boxed{3}$ 四面体OABCにおいて，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle BOC=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle COA=\dfrac{\pi}{3}$であるとする．次の問に答えよ．

(1) 頂点Cから三角形OABを含む平面に下ろした垂線をCDとするとき，$\overrightarrow{OD}$を$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$を用いて表せ．

(2) 四面体OABCの体積を求めよ．



(1) 点Dは 平面OAB上にあるので、実数 k, l を用いて

$$\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}$$

と表される。

$\overrightarrow{CD}\perp$ 平面OABより、

$$\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OA}=0 \cdots ① \\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OB}=0 \cdots ②\end{cases}$$

① $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OA}=(k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}$

$=k+l\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

ここで. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times1\times\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times1\times\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times1\times\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OA}=k+\dfrac{\sqrt{3}}{2}l-\dfrac{1}{2}=0 \cdots ①'$

② $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OB}=(k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OB}$

$=k\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+l-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}k+l-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0 \cdots ②'$

①', ②' を連立して解くと $k=2-\sqrt{6}$, $l=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$\therefore \overrightarrow{OD}=(2-\sqrt{6})\overrightarrow{OA}+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})\overrightarrow{OB}$ //

(2) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$

$=(2-\sqrt{6})\overrightarrow{OA}+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

$|\overrightarrow{CD}|^2=(2-\sqrt{6})^2+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+1$

$+2(2-\sqrt{6})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$+2(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(-1)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$+2(2-\sqrt{6})(-1)\dfrac{1}{2}$

$=\sqrt{6}-2$

$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\sqrt{6}-2}$

また、△OABの面積は

$(\triangle OAB\text{の面積})=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{1}{4}$

以上より

$(\text{四面体OABCの体積})=\dfrac{1}{4}\times\sqrt{\sqrt{6}-2}\times\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{\sqrt{\sqrt{6}-2}}{12}$ //