______年　番号______　氏名______________________________

$\boxed{1}$ 関数 $y = 3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta + 6\sin\theta + 12\cos\theta$ について，次の各問に答えよ．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする．

(1) $x = \sin\theta + 2\cos\theta$ として，y を x の関数で表せ．

(2) y の最大値と最小値を求めよ．

（茨城大学　2017）

$\boxed{2}$ 関数 $y=4(\cos 2x-\cos x)+7\sin^2 x+3\cos^2 x$ について，最大値を M，最小値を m としたとき，$|M-m|$ の値を求めよ．

（自治医科大学　2016）

$\boxed{3}$ xy 平面において，点Pが単位円周上の $y \geqq 0$ の部分を動くとき，点Pから単位円周上の3点 A(1, 0)，B(−1, 0)，$\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ までの距離の和 PA＋PB＋PC を L とする．以下，L の最大値を求める．点Pの座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおき，L を θ の式で表すと，

$$L = \sqrt{(\cos\theta - \boxed{\text{ア}})^2 + \sin^2\theta} + \sqrt{(\cos\theta + \boxed{\text{イ}})^2 + \sin^2\theta} + \sqrt{\left(\cos\theta - \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\right)^2 + \left(\sin\theta - \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}\right)^2}$$

と表される．整理すると，たとえば，点Pが第2象限にあるとき，

$$L = \left(\boxed{\text{カ}} + \sqrt{\boxed{\text{キ}}}\right)\sin\frac{\theta}{\boxed{\text{ク}}} + \cos\frac{\theta}{\boxed{\text{ケ}}}$$

となり，適当な実数 α を用いて

$$L = \sqrt{\boxed{\text{コ}} + \boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}\,\sin\left(\frac{\theta}{\boxed{\text{ス}}} + \alpha\right)$$

と表すことができる．よって，L の最大値は，$\sqrt{\boxed{\text{セ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ である．ただし，$\boxed{\text{セ}} > \boxed{\text{ソ}}$ とする．

（東洋大学　2016）

茨城大学

2017年 教育学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $y=3\cos 2\theta+4\sin 2\theta+6\sin\theta+12\cos\theta$ について，次の各問に答えよ．ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$ とする．

(1) $x=\sin\theta+2\cos\theta$ として，y を x の関数で表せ．

(2) y の最大値と最小値を求めよ．

(1) $x^2=\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta$

$$=\frac{1-\cos 2\theta}{2}+2\sin 2\theta+4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\cos 2\theta+2\sin 2\theta+\frac{5}{2}$$

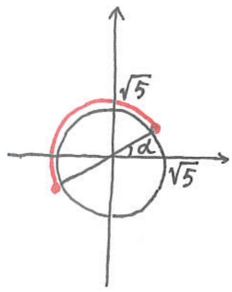
$\therefore\ 2x^2-5=3\cos 2\theta+4\sin 2\theta$

$\therefore\ y=2x^2-5+6x$

$\therefore\ \underline{y=2x^2+6x-5}$ //

(2) $x=\sin\theta+2\cos\theta$

$=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{ここで，}\alpha\text{は } \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$



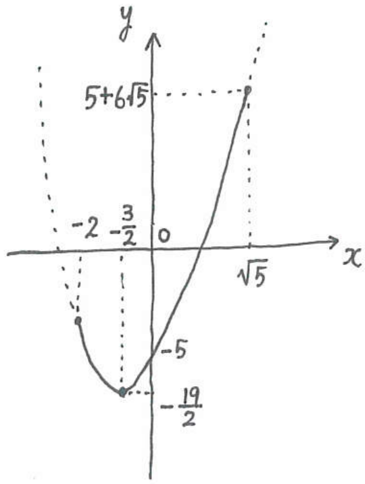
右図より

$\sqrt{5}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\leqq x\leqq\sqrt{5}$ $\quad\therefore\ -2\leqq x\leqq\sqrt{5}$ $\cdots$ ①

(1)より， $y=2(x^2+3x)-5$

$$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{19}{2}$$

$x=-\frac{3}{2}$ は ① の範囲にありグラフは右のようになる．



$\therefore$ $\underline{\text{最大値 } 5+6\sqrt{5}\text{ ，最小値 } -\frac{19}{2}}$ //

$x=\sqrt{5}$ のとき　　$x=-\frac{3}{2}$ のとき

自治医科大学

2016年 医学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 関数 $y=4(\cos 2x-\cos x)+7\sin^2 x+3\cos^2 x$ について，最大値を M，最小値を m としたとき，$|M-m|$ の値を求めよ．

$$y=4(2\cos^2 x-1-\cos x)+7(1-\cos^2 x)+3\cos^2 x$$

$$=4\cos^2 x-4\cos x+3$$

$$=4\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+2$$

$-1\leqq \cos x\leqq 1$ より.

最小値は 2，最大値は 11

$$\therefore |M-m|=|11-2|$$

$$=\underline{9}$$ //

2016 年 理工・生命科学・食環境科学 第 4 問

$\boxed{4}$ xy 平面において，点 P が単位円周上の $y \geqq 0$ の部分を動くとき，点 P から単位円周上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ までの距離の和 PA＋PB＋PC を L とする．以下，L の最大値を求める．点 P の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおき，L を θ の式で表すと，

$$L=\sqrt{(\cos\theta-\underset{1}{\boxed{\text{ア}}})^2+\sin^2\theta}+\sqrt{(\cos\theta+\overset{1}{\boxed{\text{イ}}})^2+\sin^2\theta}$$
$$+\sqrt{\left(\cos\theta-\frac{1}{\underset{2}{\boxed{\text{ウ}}}}\right)^2+\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{\overset{3}{\boxed{\text{エ}}}}}{\underset{2}{\boxed{\text{オ}}}}\right)^2}$$

と表される．整理すると，たとえば，点 P が第 2 象限にあるとき，

$$L=\left(\underset{2}{\boxed{\text{カ}}}+\sqrt{\underset{3}{\boxed{\text{キ}}}}\right)\sin\frac{\theta}{\underset{2}{\boxed{\text{ク}}}}+\cos\frac{\theta}{\underset{2}{\boxed{\text{ケ}}}}$$

となり，適当な実数 α を用いて

$$L=\sqrt{\underset{8}{\boxed{\text{コ}}}+\underset{4}{\boxed{\text{サ}}}\sqrt{\underset{3}{\boxed{\text{シ}}}}}\sin\left(\frac{\theta}{\underset{2}{\boxed{\text{ス}}}}+\alpha\right)$$

と表すことができる．よって，L の最大値は，$\sqrt{\underset{6}{\boxed{\text{セ}}}}+\sqrt{\underset{2}{\boxed{\text{ソ}}}}$ である．ただし，$\boxed{\text{セ}}>\boxed{\text{ソ}}$ とする．

$$\underline{L=\underbrace{\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}}_{PA}+\underbrace{\sqrt{(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta}}_{PB}+\underbrace{\sqrt{\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}_{PC}}\ //$$

$$L=\sqrt{2-2\cos\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}+\sqrt{2-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}$$ （∵ $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ を使った）

$$=2\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}+2\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}+\sqrt{2-2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=2\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}}+2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}+2\sqrt{\sin^2\frac{\theta-\frac{\pi}{3}}{2}}$$

点 P が第 2 象限にあることより，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$　よって，$\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{12}<\frac{\theta-\frac{\pi}{3}}{2}<\frac{\pi}{3}$

$$\therefore L=2\sin\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{3\theta-\pi}{6}$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}+2\left(\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=\underline{(2+\sqrt{3})\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}\ //$$

$$\therefore L=\underline{\sqrt{8+4\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\alpha\right)}\ //$$

∴ 最大値は $\underbrace{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}_{\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}\text{ より}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\underline{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\ //$