______ 年　番号 ______　　氏名 ______________________________

$\boxed{1}$ $f(x) = xe^{-x}$ とし，関数 $y = f(x)$ のグラフを C_1 とする．また，C_1 を x 軸方向に $\log a$ だけ平行移動したグラフを C_2 とする．ただし，a は $a > 1$ を満たす実数である．

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減，極値を調べ C_1 の概形をかけ．なお，$\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$ であることを用いてよい．

(2) C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ．

(3) 原点を O とし，C_2 と x 軸の交点を A とする．C_1，C_2 および線分 OA で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(4) (3) で求めた S に対して，$S < \dfrac{a-1}{a}$ が成り立つことを示せ．

（愛媛大学　2016）

$\boxed{2}$ 曲線 $C_1 : y = \tan x \ \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$C_2 : y = \cos x \ \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ について，次の問に答えよ．

(1) 2 曲線 C_1，C_2 の共有点の x 座標を a とするとき，$\sin a$ の値を求めよ．

(2) 曲線 C_1，C_2 と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

（香川大学　2014）

0002289720177999

愛媛大学

2016年 医学部 第4問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ $f(x)=xe^{-x}$ とし，関数 $y=f(x)$ のグラフを C_1 とする．また，C_1 を x 軸方向に $\log a$ だけ平行移動したグラフを C_2 とする．ただし，a は $a>1$ を満たす実数である．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減，極値を調べ C_1 の概形をかけ．なお，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ であることを用いてよい．

(2) C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ．

(3) 原点を O とし，C_2 と x 軸の交点を A とする．C_1，C_2 および線分 OA で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(4) (3) で求めた S に対して，$S<\dfrac{a-1}{a}$ が成り立つことを示せ．

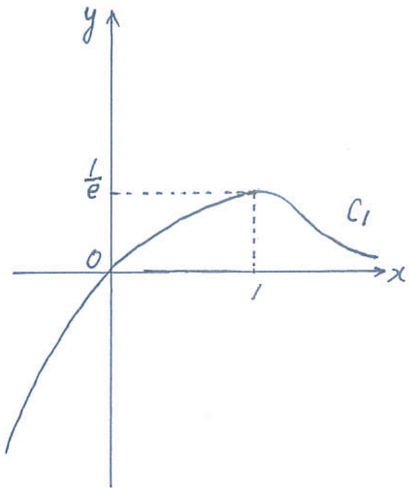
(1) $f'(x)=e^{-x}+x\cdot(-e^{-x})$

$=(1-x)e^{-x}$

$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ より

下の増減表とあわせて．グラフは右のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$



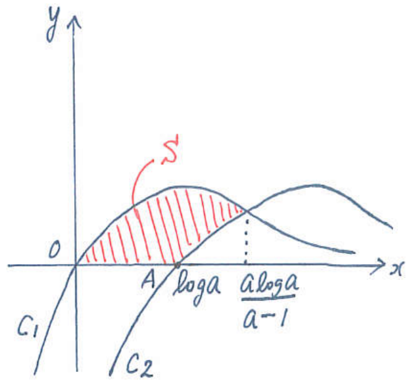
(2) $xe^{-x}=(x-\log a)e^{-(x-\log a)}$

$\Longleftrightarrow xe^{-x}=(x-\log a)e^{-x}\cdot a$

$\Longleftrightarrow (x-ax+a\log a)e^{-x}=0$

$\Longleftrightarrow (a-1)x=a\log a$

$\therefore\ x=\dfrac{a\log a}{a-1}$ //



(3) $p=\dfrac{a\log a}{a-1}$ とおくと．

$$S=\int_0^p xe^{-x}dx-\int_{\log a}^p (x-\log a)\cdot e^{-x}\cdot a\,dx$$

$$=\int_0^p x(-e^{-x})'dx-a\int_{\log a}^p (x-\log a)\cdot(-e^{-x})'dx$$

$$=\left[-xe^{-x}\right]_0^p-\int_0^p -e^{-x}dx-a\left[(x-\log a)(-e^{-x})\right]_{\log a}^p+a\int_{\log a}^p -e^{-x}dx$$

2枚目へつづく

0002289720177999

愛媛大学

2016年 医学部 第4問

2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ $f(x)=xe^{-x}$ とし，関数 $y=f(x)$ のグラフを C_1 とする．また，C_1 を x 軸方向に $\log a$ だけ平行移動したグラフを C_2 とする．ただし，a は $a>1$ を満たす実数である．

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減，極値を調べ C_1 の概形をかけ．なお，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ であることを用いてよい．

(2) C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ．

(3) 原点をOとし，C_2 と x 軸の交点をAとする．C_1，C_2 および線分OAで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(4) (3)で求めた S に対して，$S<\dfrac{a-1}{a}$ が成り立つことを示せ．

(3) のつづき

$$S=-pe^{-p}-\left[e^{-x}\right]_0^p-a\left\{(p-\log a)\cdot(-e^{-p})\right\}+a\left[e^{-x}\right]_{\log a}^p$$

$$=-pe^{-p}-e^{-p}+1+a(p-\log a)e^{-p}+a\left(e^{-p}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=-pe^{-p}-e^{-p}+ape^{-p}-a\log a\cdot e^{-p}+ae^{-p}$$

$$=e^{-p}(-p-1+ap-a\log a+a)$$

ここで，$p=\dfrac{a\log a}{a-1}$ より．$e^{-p}=(e^{\log a})^{-\frac{a}{a-1}}=a^{-\frac{a}{a-1}}$

$\therefore\ S=a^{-\frac{a}{a-1}}(a-1)$ $\qquad\therefore\ \underline{S=(a-1)\cdot a^{-\frac{a}{a-1}}}$ //

(4) $$S-\frac{a-1}{a}=(a-1)\cdot\left(a^{-\frac{a}{a-1}}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=(a-1)\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot a^{-\frac{1}{a-1}}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\frac{a-1}{a}\cdot\left(a^{-\frac{1}{a-1}}-1\right)$$

ここで，$a>1$ より．$a-1>0$，$a^{-\frac{1}{a-1}}-1<0$

$\therefore\ S-\dfrac{a-1}{a}<0$ より．$S<\dfrac{a-1}{a}$ ▨

香川大学

2014年 教育学部・農学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 曲線 $C_1 : y = \tan x \ \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$，$C_2 : y = \cos x \ \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$ について，次の問に答えよ．

(1) 2曲線 C_1，C_2 の共有点の x 座標を a とするとき，$\sin a$ の値を求めよ．

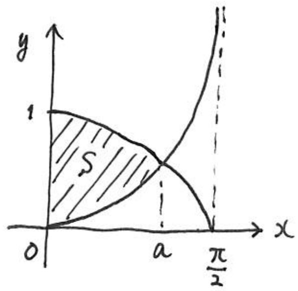
(2) 曲線 C_1，C_2 と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $\tan a = \cos a$

$\therefore \sin a = \cos^2 a \quad \therefore \sin^2 a + \sin a - 1 = 0$

$\therefore \sin a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \quad 0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin a \geqq 0 \quad \therefore \underline{\sin a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ //

(2)



$S = \displaystyle\int_0^a \cos x - \tan x \, dx$

$= \Big[\sin x + \log|\cos x|\Big]_0^a$

$= \sin a + \log \cos a$

(1) より．$\sin a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\cos a = \sqrt{1 - \dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \dfrac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}{2} = \dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

$\therefore S = \underline{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + \dfrac{1}{2}\log\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ //