______ 年　番号 ______　　氏名 ______________________________

$\boxed{1}$ xy 平面上に $x=2\cos 2\theta$，$y=2\cos 3\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ と媒介変数表示された曲線 C を考える．このとき，次の問に答えよ．

(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，y を x の式で表せ．また，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ において，y を x の式で表せ．

(2) 曲線 C の概形を描け．

(3) 曲線 C が囲む領域の面積を求めよ．

（佐賀大学　2014）

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 異なる 2 点 $(-3,\ -3)$，$(a,\ b)$ を通る直線の方程式を求めよ．ただし，a，b は実数とする．

(2) 媒介変数表示 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = -\sin^2 t \end{cases}$ で表される曲線の概形をかけ．

(3) 関数 $f(t) = \dfrac{-\sin^2 t + 3}{2\cos t + 3}$ の最大値および最小値を求めよ．

（島根大学　2013）

$\boxed{3}$ 次の条件（ア），（イ）を満たす複素数 z を考える．

（ア）　$z + \dfrac{i}{z}$ は実数である

（イ）　z の虚部は正である

ただし，i は虚数単位である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $r = |z|$ とおくとき，z を r を用いて表せ．

(2) z の虚部が最大となるときの z を求めよ．

（富山大学　2016）

$\boxed{4}$ $z = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位である．

(1) $z^n = 1$ となる最小の正の整数 n を求めよ．

(2) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ の値を求めよ．

(3) $(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)$ の値を求めよ．

(4) $\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5}$ の値を求めよ．

（富山県立大学　2016）

佐賀大学

2014年 理工学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ xy 平面上に $x=2\cos 2\theta$，$y=2\cos 3\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ と媒介変数表示された曲線 C を考える．このとき，次の問に答えよ．

(1) $t=\cos\theta$ とおいて，x と y を t の式で表せ．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，y を x の式で表せ．また，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ において，y を x の式で表せ．

(3) 曲線 C の概形を描け．

(1) $x=2(2\cos^2\theta-1)$，$y=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$ より

$\underline{x=4t^2-2,\ y=8t^3-6t}$ //

(2) (i) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき．

$0 \leqq t \leqq 1$ なので $t=\sqrt{\dfrac{x+2}{4}}$ $\therefore \underline{y=(x-1)\sqrt{x+2}}$ //

(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ のとき．

$-1 \leqq t \leqq 0$ なので $t=-\sqrt{\dfrac{x+2}{4}}$ $\therefore \underline{y=(1-x)\sqrt{x+2}}$ //

(3) (2)より どちらの場合も $-2 \leqq x \leqq 2$ であり

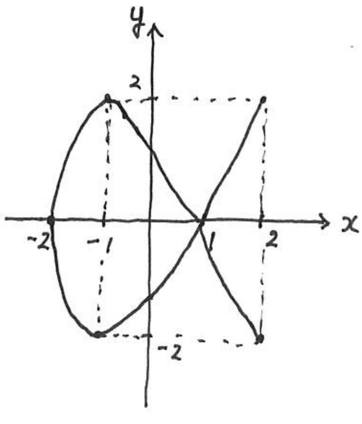
グラフは x 軸に関して対称なので，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の場合を調べる．

$$y'=\sqrt{x+2}+(x-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$
$$=\frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}}$$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	-2	↗	2

$\therefore$ よって増減表は右のようになる．

よってグラフは右のようになる．



島根大学

2013年 総合理工（数理・情報システム以外） 第1問

1 次の問いに答えよ．

(1) 異なる2点 $(-3,\ -3)$，$(a,\ b)$ を通る直線の方程式を求めよ．ただし，$a,\ b$ は実数とする．

(2) 媒介変数表示 $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = -\sin^2 t \end{cases}$ で表される曲線の概形をかけ．

(3) 関数 $f(t) = \dfrac{-\sin^2 t + 3}{2\cos t + 3}$ の最大値および最小値を求めよ．

(1) (i) $a \neq -3$ のとき．$y = \dfrac{b+3}{a+3}(x+3) - 3$ $\quad \therefore\ y = \dfrac{b+3}{a+3}x + \dfrac{3(b-a)}{a+3}$

(ii) $a = -3$ のとき．$x = -3$

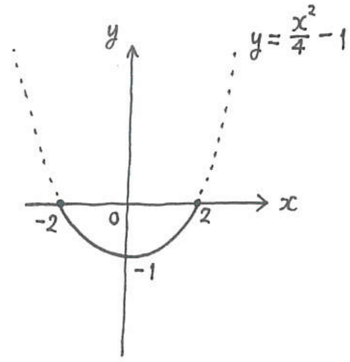
(i)，(ii) より $\begin{cases} y = \dfrac{b+3}{a+3}x + \dfrac{3(b-a)}{a+3} & (a \neq -3 \text{ のとき}) \\ x = -3 & (a = -3 \text{ のとき}) \end{cases}$ //

(2) $\cos t = \dfrac{x}{2}$，$\sin^2 t = -y$ を $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ に代入して

$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + (-y) = 1$ $\quad \therefore\ y = \dfrac{x^2}{4} - 1$

また，$-1 \leqq \cos t \leqq 1$，$0 \leqq \sin^2 t \leqq 1$ より．$-2 \leqq x \leqq 2$，$-1 \leqq y \leqq 0$

よって．曲線は右のようになる．



(3) $f(t)$ は 2点 $(2\cos t,\ -\sin^2 t)$，$(-3,\ -3)$ を通る直線の傾きを表しているから，右下図より．

$f(t)$ が最大となるのは．$(-2,\ 0)$ と $(-3,\ -3)$ を通るので

(1) より．傾きは．3

$f(t)$ が最小となるのは．(2) の曲線に接するときなので

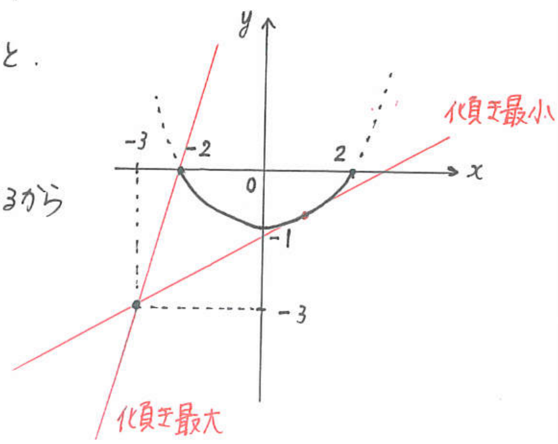
接点を $\left(s,\ \dfrac{s^2}{4} - 1\right)$（ただし，$-2 \leqq s \leqq 2$）とおくと．

$y' = \dfrac{x}{2}$ より．接線は．$y = \dfrac{s}{2}(x - s) + \dfrac{s^2}{4} - 1$

すなわち．$y = \dfrac{s}{2}x - \dfrac{s^2}{4} - 1$ これが $(-3,\ -3)$ を通るから

$-3 = -\dfrac{3}{2}s - \dfrac{s^2}{4} - 1$ $\quad \therefore\ s^2 + 6s - 8 = 0$

$-2 \leqq s \leqq 2$ より．$s = \sqrt{17} - 3$ 傾きは $\dfrac{\sqrt{17} - 3}{2}$



以上より 最大値 3，最小値 $\dfrac{\sqrt{17} - 3}{2}$ //

富山大学

2016年 工学部・理学部（その他）第3問

数理 石井K

3 次の条件（ア），（イ）を満たす複素数 z を考える．

（ア） $z+\dfrac{i}{z}$ は実数である

（イ） z の虚部は正である

ただし，i は虚数単位である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $r=|z|$ とおくとき，z を r を用いて表せ．

(2) z の虚部が最大となるときの z を求めよ．

(1) $r=|z|$ とおくと (イ) より，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0<\theta<\pi)$ と表せる

このとき，

$$z+\frac{i}{z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{i}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{i}{r}\cdot(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=\left(r\cos\theta+\frac{1}{r}\sin\theta\right)+i\left(r\sin\theta+\frac{1}{r}\cos\theta\right)$$

∴虚部は $r\sin\theta+\frac{1}{r}\cos\theta$ で (ア) より，$r\sin\theta+\frac{1}{r}\cos\theta=0$ … (*)

$\therefore\ r\sin\theta=-\frac{1}{r}\cos\theta$

両辺2乗して，$r^2\sin^2\theta=\frac{1}{r^2}\cos^2\theta$

$r^4\sin^2\theta=1-\sin^2\theta$ 　 $0<\theta<\pi$ より $\sin\theta>0$ なので，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{r^4+1}}$

(*) に代入して，$\cos\theta=-\dfrac{r^2}{\sqrt{r^4+1}}$

$\therefore\ z=r\left(-\dfrac{r^2}{\sqrt{r^4+1}}+\dfrac{i}{\sqrt{r^4+1}}\right)$ 　 $\therefore\ z=-\dfrac{r^3}{\sqrt{r^4+1}}+\dfrac{r}{\sqrt{r^4+1}}i$ //

(2) $f(r)=\dfrac{r}{\sqrt{r^4+1}}$ とおく $(r>0)$

$$f'(r)=\frac{\sqrt{r^4+1}-r\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4r^3}{\sqrt{r^4+1}}}{r^4+1}=\frac{(1-r)(1+r)(1+r^2)}{\sqrt{r^4+1}\,(r^4+1)}$$

r	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(r)$		$+$	0	$-$
$f(r)$		↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘

∴ 増減表より z の虚部が最大となる z は $r=1$ のときで

$z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ //

2016年 工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位である．

(1) $z^n=1$ となる最小の正の整数 n を求めよ．

(2) $z^4+z^3+z^2+z+1$ の値を求めよ．

(3) $(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)$ の値を求めよ．

(4) $\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}$ の値を求めよ．

(1) ド・モアブルの定理より,

$$z^n=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^n$$

$$=\cos\frac{2n\pi}{5}+i\sin\frac{2n\pi}{5}$$

$$\therefore\ z^n=1 \iff \frac{2n\pi}{5}=2k\pi \quad (k\text{は整数})$$

$$\iff n=5k$$

∴ 最小の正の整数 n は, $\underline{n=5}$ //

(2) $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=z^5-1$

$=0$ (∵(1)より)

よって, $0<\dfrac{2\pi}{5}<\dfrac{\pi}{2}$ より, $z\neq1$ であることから, $\underline{z^4+z^3+z^2+z+1=0}$ //

(3) (与式) $=(1+z+z^2+z^3)(1+z^4+z^8+z^{12})$

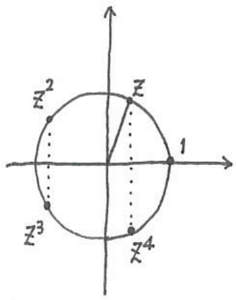
$1+z+z^2+z^3+z^4=0$ と $z^5=1$ より

$=-z^4\cdot(1+z^2+z^3+z^4)$

$=-z^4\cdot(-z)$

$=z^5$

$=\underline{1}$ //



(4) 右の図より, $z^4=\overline{z}$, $z^3=\overline{z^2}$

$$\therefore\ z+z^2+z^3+z^4=(z+\overline{z})+(z^2+\overline{z^2})$$

$$=2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}$$

一方, $z+z^2+z^3+z^4=-1$ より,

$\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}=\underline{-\dfrac{1}{2}}$ //