$\boxed{1}$ 曲線 $C: y=x^2$ 上の点をPとする．ただしPの x 座標は正とする．点Pにおける C の接線を ℓ，点Pを通り ℓ に垂直な直線を m とする．直線 m と曲線 C がPとは異なる交点をもつとき，その点をQとする．点Pが曲線 C 上を動くとき，以下の問に答えよ．

(1) 点Qにおける C の接線を n とし，ℓ と n との交点をRとする．点Rの座標を $(p,\ q)$ とするとき

$$q=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}\,p^2}+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

が成り立つ．

(2) 曲線 C と線分PQで囲まれる部分の面積の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり，そのときの点P，Qの座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}},\ \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}},\ \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\right)$$

である．

（早稲田大学　2016）

0002180819187999

早稲田大学

2016年 人間科学学部（文系） 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 曲線 $C : y = x^2$ 上の点をPとする．ただしPの x 座標は正とする．点Pにおける C の接線を ℓ，点Pを通り ℓ に垂直な直線を m とする．直線 m と曲線 C がPとは異なる交点をもつとき，その点をQとする．点Pが曲線 C 上を動くとき，以下の問に答えよ．

(1) 点Qにおける C の接線を n とし，ℓ と n との交点をRとする．点Rの座標を $(p,\ q)$ とするとき

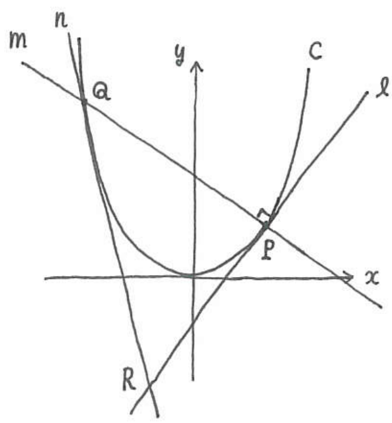
$$q = \frac{\overset{-1}{\boxed{\text{キ}}}}{\underset{16}{\boxed{\text{ク}}}\,p^2} + \frac{\boxed{\text{ケ}}\ {-1}}{\boxed{\text{コ}}\ 2}$$

が成り立つ．

(2) 曲線 C と線分PQで囲まれる部分の面積の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}\ 4}{\boxed{\text{シ}}\ 3}$ であり，そのときの点P，Qの座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{\boxed{\text{ス}}\ 1}{\boxed{\text{セ}}\ 2},\ \frac{\boxed{\text{ソ}}\ 1}{\boxed{\text{タ}}\ 4}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{\overset{-3}{\boxed{\text{チ}}}}{\underset{2}{\boxed{\text{ツ}}}},\ \frac{\overset{9}{\boxed{\text{テ}}}}{\underset{4}{\boxed{\text{ト}}}}\right)$$

である．



(1) $P(t, t^2)$ $(t>0)$ とおくと，$y' = 2x$ より

ℓ の傾きは $2t$

$\therefore\ m : y = -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2$

$\therefore\ m : y = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2} + t^2$

$x^2 + \frac{1}{2t}x - \frac{1}{2} - t^2 = 0$

解と係数の関係より，Qの x 座標を s とおくと，$s + t = -\frac{1}{2t}$ $\quad\therefore\ s = -t - \frac{1}{2t}$

$\therefore\ n : y = \left(-2t - \frac{1}{t}\right)\left(x + t + \frac{1}{2t}\right) + \left(-t - \frac{1}{2t}\right)^2$

$n : y = \left(-2t - \frac{1}{t}\right)x - 2t^2 - 1 - 1 - \frac{1}{2t^2} + t^2 + \frac{1}{4t^2} + 1$

$\therefore\ n : y = \left(-2t - \frac{1}{t}\right)x - t^2 - \frac{1}{4t^2} - 1 \quad \cdots①$

$\ell : y = 2tx - t^2 \quad \cdots②$

①，②より，$p = -\frac{1}{4t}$，$q = -\frac{1}{2} - t^2$

$\therefore$ t を消去して，$\underline{q = -\frac{1}{16p^2} - \frac{1}{2}}$ //

(2) $S = \int_{-t-\frac{1}{2t}}^{t} -(x-t)\left\{x - \left(-t - \frac{1}{2t}\right)\right\}dx = \frac{1}{6}\left(2t + \frac{1}{2t}\right)^3$

$\frac{1}{6}$公式

相加・相乗平均の関係より，

$2t + \frac{1}{2t} \geqq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{2t}} = 2$

等号成立は $t = \frac{1}{2}$ のとき．

$\therefore\ S \geqq \frac{1}{6} \cdot 2^3$

$\therefore$ $\underline{最小値\ \frac{4}{3}}$ //

$\underline{P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right),\ Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)}$ //