

1 次の問いに答えよ.

- (1) $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_{n+1} + 2a_{n+1}a_n - 3a_n = 0$ ($n \geq 1$) で与えられる数列 $\{a_n\}$ について, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めよ. また, 一般項 a_n を推測し, その推測の結果を数学的帰納法で証明せよ.
- (2) $\frac{7}{12}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ であることを利用して $\sin \frac{7}{12}\pi$ を求め, $1 \leq x \leq 4$ のとき, 次の方程式を解け.

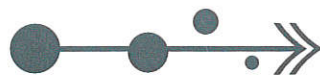
$$\sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

- (3) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ とする. このとき, $X = \log_2 \cos x$ の範囲を求め, 次の不等式を解け.

$$2(\log_2 \cos x)^2 + (4 - \log_2 3) \log_2 \cos x + 2 - \log_2 3 \leq 0$$

注意: $\log_2 \cos x$ は $\log_2(\cos x)$ を表す.

(長崎大学 2013)



2013年第2問

1枚目 / 2枚

2 次の問いに答えよ。

- (1) $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_{n+1} + 2a_{n+1}a_n - 3a_n = 0$ ($n \geq 1$) で与えられる数列 $\{a_n\}$ について, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めよ。また, 一般項 a_n を推測し, その推測の結果を数学的帰納法で証明せよ。
- (2) $\frac{7}{12}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ であることを利用して $\sin \frac{7}{12}\pi$ を求め, $1 \leq x \leq 4$ のとき, 次の方程式を解け。

$$\sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

- (3) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ とする。このとき, $X = \log_2 \cos x$ の範囲を求め, 次の不等式を解け。

$$2(\log_2 \cos x)^2 + (4 - \log_2 3) \log_2 \cos x + 2 - \log_2 3 \leq 0$$

注意: $\log_2 \cos x$ は $\log_2(\cos x)$ を表す。

$$(1) a_2 + 2a_2a_1 - 3a_1 = 0 \text{ より, } 4a_2 = \frac{9}{2} \quad \therefore a_2 = \frac{9}{8} //$$

$$\text{同様に計算すると, } a_3 = \frac{27}{26}, a_4 = \frac{81}{80}, a_5 = \frac{243}{242} //$$

$$a_n = \frac{3^n}{3^n - 1} \text{ と推測できるので, 数学的帰納法で示す。}$$

$$(i) n=1 \text{ のとき, } a_1 = \frac{3}{3-1} \text{ となり, 成り立つ。}$$

$$(ii) n=k \text{ のとき 成り立つと仮定する。このとき, } a_k = \frac{3^k}{3^k - 1}$$

$$\therefore \text{漸化式より, } a_{k+1} + 2a_{k+1} \cdot \frac{3^k}{3^k - 1} - 3 \cdot \frac{3^k}{3^k - 1} = 0$$

$$\text{これを解くと, } a_{k+1} = \frac{3^{k+1}}{3^{k+1} - 1} \quad \therefore n=k+1 \text{ のときも成り立つ。}$$

$$(i), (ii) \text{ より, すべての自然数 } n \text{ について, } a_n = \frac{3^n}{3^n - 1} \text{ が成り立つ。} \square$$

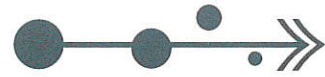
(2) 加法定理より,

$$\begin{aligned} \sin \frac{7}{12}\pi &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} // \end{aligned}$$

$$\therefore \sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{12}\pi + 2n\pi, \frac{7}{12}\pi + 2n\pi \quad (n: \text{整数})$$

$$-\frac{17}{12}\pi < 1 < \frac{5}{12}\pi < \frac{7}{12}\pi < 4 < \frac{29}{12}\pi \text{ より,}$$

$$x = \frac{5}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi //$$



2013年 第2問

2枚目 / 2枚

数理
石井K

2 次の問いに答えよ。

- (1) $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_{n+1} + 2a_{n+1}a_n - 3a_n = 0$ ($n \geq 1$) で与えられる数列 $\{a_n\}$ について, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めよ。また, 一般項 a_n を推測し, その推測の結果を数学的帰納法で証明せよ。
- (2) $\frac{7}{12}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ であることを利用して $\sin \frac{7}{12}\pi$ を求め, $1 \leq x \leq 4$ のとき, 次の方程式を解け。

$$\sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

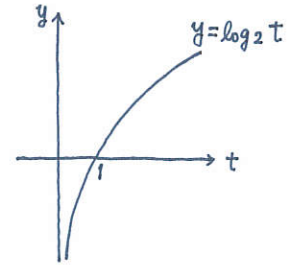
- (3) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ とする。このとき, $X = \log_2 \cos x$ の範囲を求め, 次の不等式を解け。

$$2(\log_2 \cos x)^2 + (4 - \log_2 3) \log_2 \cos x + 2 - \log_2 3 \leq 0$$

注意: $\log_2 \cos x$ は $\log_2(\cos x)$ を表す。

- (3) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $0 < \cos x \leq 1$

$y = \log_2 t$ のグラフは右のようになるから。



$$\underline{X = \log_2 \cos x \leq 0} //$$

不等式を X で表すと,

$$2X^2 + (4 - \log_2 3)X + 2 - \log_2 3 \leq 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 - \log_2 3 \\ 1 \end{array}$$

$$\therefore (2X + 2 - \log_2 3)(X + 1) \leq 0$$

$$\frac{\log_2 3 - 2}{2} > \frac{\log_2 2^{\frac{3}{2}} - 2}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4} > -1 \text{ より.}$$

$$\therefore -1 \leq X \leq \frac{\log_2 3}{2} - 1 \quad \text{これは, } X \leq 0 \text{ をみたら.}$$

$$\therefore -1 \leq \log_2 \cos x \leq \frac{\log_2 3}{2} - 1 \iff \frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\iff \underline{\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}} //$$

