0002095544097999

愛知教育大学

2015年第7問

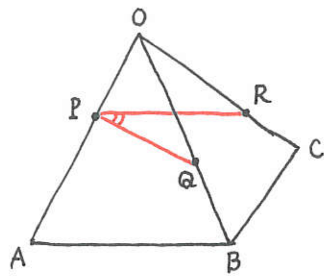
数理 石井K

$\boxed{7}$ 1辺の長さが4の正四面体OABCがある．点P，Q，Rをそれぞれ辺OA，OB，OC上の点とし，OP，OQ，ORの長さをそれぞれ a，b，b（ただし，$0<a<4$，$0<b<4$）とする．

(1) $\cos\angle QPR$ を a，b を用いて表せ．

(2) $b=2$ とし，点Pは $\angle QPR$ の大きさを最大にする点とする．このとき，a の値を求めよ．

(3) (2)の条件のもとで，$\triangle PQR$ の面積を求めよ．



(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{a}{4}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{b}{4}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{b}{4}\overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=-\frac{a}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{4}\overrightarrow{OB}$

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=4$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos 60^\circ=8$

であるから，

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{a^2}{16}\cdot|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{b^2}{16}\cdot|\overrightarrow{OB}|^2-\frac{ab}{8}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$=a^2+b^2-ab$$

$\therefore |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{a^2-ab+b^2}$ 立体の対称性より，$|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{a^2-ab+b^2}$

$\triangle OQR$ は正三角形より，$|\overrightarrow{QR}|=b$

$\therefore$ 余弦定理より，

$$\cos\angle QPR=\frac{a^2-ab+b^2+a^2-ab+b^2-b^2}{2\cdot\sqrt{a^2-ab+b^2}\cdot\sqrt{a^2-ab+b^2}}$$

$$=\underline{\frac{2a^2-2ab+b^2}{2(a^2-ab+b^2)}}$$ //

(2) (1)の結果に $b=2$ を代入して，

$$\cos\angle QPR=\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a+4}=\frac{a^2-2a+4-2}{a^2-2a+4}=1-\frac{2}{(a-1)^2+3}$$

$\angle QPR$：最大 $\Longleftrightarrow$ $\cos\angle QPR$：最小 であるから，$\underline{a=1}$ //

(3) (2)のとき，$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{1-2+4}=\sqrt{3}$

$\cos\angle QPR=\frac{1}{3}$ より，$\sin\angle QPR=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\therefore \triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=\underline{\sqrt{2}}$$ //