2013年第4問

$\boxed{4}$ 行列 $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，E と O はそれぞれ2次の単位行列と零行列である．答えを導く過程も示すこと．

(1) 行列 A に対して，等式 $A^2-5A+5E=O$ が成り立つことを示せ．

(2) 行列 B について，$B=A^4-3A^3-3A^2+2A+9E$ のとき，行列 B を求めよ．

(3) 行列 A の表す1次変換によって，直線 $2x-y+1=0$ 上の点を移す．このとき，像を表す図形の方程式を求めよ．

(1) $A^2=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&5\\5&5\end{pmatrix}$

$\therefore A^2-5A+5E=\begin{pmatrix}10&5\\5&5\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$=O$ ■

(2) $B=(A^2-5A+5E)(A^2+2A+2)+2A-E$

$=2A-E$ （∵(1)より）

$=2\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\underline{\begin{pmatrix}5&2\\2&3\end{pmatrix}}$ //

$$\begin{array}{r}
A^2+2A+2 \\
A^2-5A+5E\,\big)\,\overline{A^4-3A^3-3A^2+2A+9E} \\
A^4-5A^3+5A^2 \\
\hline
2A^3-8A^2+2A \\
2A^3-10A^2+10A \\
\hline
2A^2-8A+9E \\
2A^2-10A+10E \\
\hline
2A-E
\end{array}$$

(3) 直線 $2x-y+1=0$ 上の点を (X,Y)，移動後の点を (x,y) とすると，

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ より．$x=3X+Y$ …①，$y=X+2Y$ …②

①，②より，$X=\frac{1}{5}(2x-y)$，$Y=\frac{1}{5}(-x+3y)$

これを $2X-Y+1=0$ に代入して．

$\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}y+1=0$

$\therefore\ \underline{x-y+1=0}$ //