



2012年 理学部・医学部 第4問

4 次の問いに答えよ。

(1) 次の不定積分を求めよ。

$$\int \log(1+x) dx$$

(2) 関数 $f(x)$ が区間 $[0, 1]$ で連続な増加関数であって、常に $f(x) \geq 0$ であるものとする。また、 n を自然数とする。このとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \{f(1) - f(0)\}$$

(3) $f(x) = \log(1+x)$ に対して (2) の結果を用いて、次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \log \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\} \right]$$