2015年 教育学部（算数・技術）第2問

2 下図のような1辺の長さが4の立方体ABCD-EFGHがある．辺AB上に点PをBP＝3となるように取り，辺BC上に点Qを取る．また，Bから△PFQへ垂線BKを下ろす．BQの長さをaとして，以下の問いに答えよ．

(1) aを用いて△PFQの面積を表せ．

(2) aを用いてBKの長さを表せ．

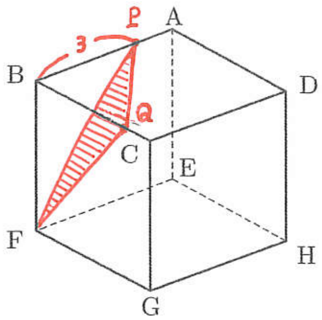
(3) BKの長さは$\dfrac{\sqrt{30a}}{5}$以下であることを示せ．

(1) 三平方の定理より，

$PF=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$PQ=\sqrt{3^2+a^2}=\sqrt{a^2+9}$，

$FQ=\sqrt{4^2+a^2}=\sqrt{a^2+16}$



∴ 余弦定理より，

$$\cos\angle PFQ=\frac{25+a^2+16-(a^2+9)}{2\cdot 5\cdot\sqrt{a^2+16}}=\frac{16}{5\sqrt{a^2+16}}$$

$\sin^2\angle PFQ+\cos^2\angle PFQ=1$ より，$\sin\angle PFQ=\dfrac{\sqrt{25a^2+144}}{5\sqrt{a^2+16}}$

$$\therefore \triangle PFQ=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{a^2+16}\cdot\frac{\sqrt{25a^2+144}}{5\sqrt{a^2+16}}$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{25a^2+144}}_{\,//}$$

(2) 三角すいPBCFの体積をVとおくと，$V=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot a\cdot 4\cdot\frac{1}{3}=2a$

一方，$V=\triangle PFQ\cdot BK\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\sqrt{25a^2+144}\cdot BK$

よって，$BK=\underline{\dfrac{12a}{\sqrt{25a^2+144}}}_{\,//}$

(3) (2)より，$BK=\dfrac{12\sqrt{a}}{\sqrt{25a+\frac{144}{a}}}$

$a>0$ より，相加・相乗平均の関係から $25a+\dfrac{144}{a}\geqq 2\sqrt{25a\cdot\dfrac{144}{a}}=120$

$\therefore BK\leqq\dfrac{12\sqrt{a}}{\sqrt{120}}=\dfrac{\sqrt{30a}}{5}$ （等号成立は $a=\frac{12}{5}$ のとき） ■