# 千葉工業大学

2014年 工・情報科学・社シス科学 第4問

$\boxed{4}$ $xy$ 平面上に放物線 $C: y=\frac{1}{4}x^2+4$ と点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ がある．ただし，$p \geqq 0$ とする．$C$ 上の点 $\left(p,\ \frac{1}{4}p^2+4\right)$ における $C$ の接線を $\ell$ とし，$\ell$ に関して，P と対称な点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $p=0$ のとき，$\mathrm{Q}(0,\ \boxed{\text{ア}})$ である．

(2) $\ell$ の方程式は $y=\dfrac{p}{\boxed{\text{イ}}}x-\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}p^2+\boxed{\text{オ}}$ である．線分 PQ の中点が $\ell$ 上にあることから

$$Y=\frac{p}{\boxed{\text{カ}}}X+\boxed{\text{キ}} \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．

(3) $p>0$ のとき，Q が，P を通り $\ell$ と直交する直線上にあることから

$$Y=\frac{\boxed{\text{クケ}}}{p}X+\boxed{\text{コ}} \qquad \cdots\cdots(**)$$

が成り立つ．$(*)$ と $(**)$ から $p$ を消去することにより

$$X^2+Y^2-\boxed{\text{サシ}}\,Y+\boxed{\text{スセ}}=0$$

が成り立つことがわかる．

(4) $X$ の最小値は $\boxed{\text{ソタ}}$ であり，このとき $p=\boxed{\text{チ}}$ である．$p$ が 0 から $\boxed{\text{チ}}$ まで変化するとき，線分 PQ が通過する部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\pi+\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である．