



2012年 理工（理数選抜）第3問

3 $h > 0, d \geq 0$ とし、座標空間において4点 $A(0, 0, 1), B(0, 0, -1), C(h, 0, -d), D(0, h, d)$ を頂点とする四面体を考える。さらに $CD = 2$ とする。したがって、四面体の6本の辺のうち向かい合う2辺の長さは3組とも互いに等しい。つまり

$$AB = CD, \quad AC = BD, \quad AD = BC$$

となっており、4つの面はすべて互いに合同である。この四面体 ABCD について以下の問いに答えよ。

(1) h を d で表し、 d のとりうる値の範囲を求めよ。

点 A を通り平面 BCD に垂直な直線と平面 BCD の交点を P とおく。この点 P を点 A から平面 BCD に下ろした垂線の足とよぶ。同様に、点 B から平面 ACD に下ろした垂線の足を Q、点 C から平面 ABD へ下ろした垂線の足を R、点 D から平面 ABC へ下ろした垂線の足を S とおく。

(2) 点 R, S は直線 AB 上にあることに注意して、R, S の座標を d で表せ。また、四面体 ABCD の対称性を考慮して、点 P, Q の座標を d で表せ。さらに、計算により $\vec{AP} \cdot \vec{BQ} = 0$ を確認せよ。

(3) 辺 BD の長さのとりうる値の範囲を求めよ。

(4) 平面 ABC と平面 ACD が直線 AC に沿って角度 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) で交わっている。 θ のとりうる値の範囲を求めよ。ただし2平面の交わる角度とは、それぞれの平面に直交する2直線のなす角度である。