北海道大学

2013年 文系 第1問

数理 石井K

1 $f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x+\cos x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ とする.

(1) $t=\sin x+\cos x$ とおき，$f(x)$ を t の関数で表せ.

(2) t の取り得る値の範囲を求めよ.

(3) $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ.

(1) $t^2=1+2\sin x\cos x$ より $\quad \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

$\therefore f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(t^2-1)+t \qquad \therefore f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t^2+t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ //

(2) $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であり，$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{9}{4}\pi$ より.

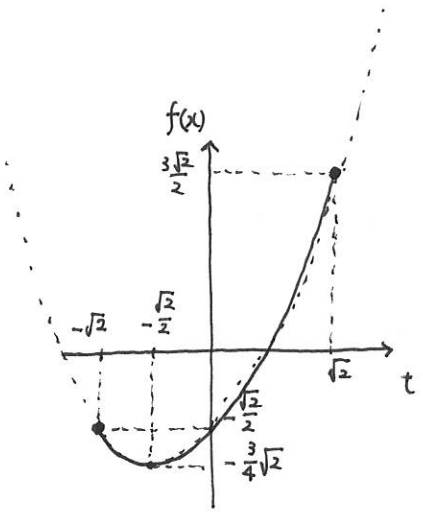
$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ //

(3) (1) より

$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(t^2+\sqrt{2}t\right)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$

$\therefore$ 右のグラフより.



$f(x)$ の{最大値は $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ $\left(x=\dfrac{\pi}{4}\right)$
{最小値は $-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ $\left(x=\dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{19}{12}\pi\right)$ //

$t=\sqrt{2} \iff \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

$\iff x=\dfrac{\pi}{4}$

$t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$