

2011年 第2問

2  $x > 0$ において関数

$$f(x) = \sin(\log x)$$

を考える.

方程式  $f(x) = 0$  の  $0 < x \leq 1$  における解を大きいほうから順にならべて,

$$1 = \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_n > \alpha_{n+1} > \cdots$$

とする. 以下の問いに答えよ. ただし,  $\log x$  は  $e$  を底とする自然対数とする. なお, 不定積分の計算においては積分定数を省略してもよい.

(1) 不定積分  $I(x)$ ,  $J(x)$  をそれぞれ

$$I(x) = \int e^x \sin x dx, \quad J(x) = \int e^x \cos x dx$$

とおくとき,  $I(x) + J(x)$ ,  $I(x) - J(x)$  を求めよ.(2) 不定積分  $\int f(x) dx$  を求めよ.(3)  $\alpha_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を求めよ.(4) 区間  $\alpha_{n+1} \leq x \leq \alpha_n$  において, 曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸とで囲まれる部分の面積を  $S_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とする.  $S_n$  を求めよ.(5) 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$  の和  $S$  を求めよ.